

Elektromagnetische Felder und Neuronen

Endbericht

Endbericht des Interdisziplinären Praktikums „Elektromagnetische Wellen und Neuronen“

Lehrende: Mag. Florian Wodlei (theoretische Physik)
 Prof. Dr. Georg Propst (Mathematik)
 Dipl.-Ing. Katrin Friedl (Elektrotechnik)

Studenten: Fleischhacke Matthias
 Grill Manuel, BSc
 Karnassnigg Astrid
 Konschegg Jutta
 Kreuzer Verena
 Kronlachner Marcella
 Reich Julia
 Sabathiel Nikolaus
 Schiemel Joerg
 Wagner Christoph

FLORIAN WODLEI ET AL.

ELEKTROMAGNETISCHE FELDER UND NEURONEN

KARL FRANZENS UNIVERSITÄT GRAZ

Copyright © 2012 Florian Wodlei et al.

PUBLISHED BY KARL FRANZENS UNIVERSITÄT GRAZ

TUFTE-LATEX.GOOGLECODE.COM

The layout and design of this book is licensed under the Apache License, Version 2.0 (the “License”); you may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://www.apache.org/licenses/LICENSE-2.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2012

Inhaltsverzeichnis

<i>Einleitung</i>	7
<i>Numerische Simulation des Hodgkin-Huxley Modells</i>	9
<i>Ausgewählte Quellen niederfrequenter Magnetfelder</i>	21
<i>Modellierung der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit einem neuronalen System</i>	29
<i>Abschließende Bemerkungen und Ausblick</i>	39

Einleitung

Der hier vorliegende Bericht stellt zusammenfassend dar, was im Rahmen des Interdisziplinären Praktikums „Elektromagnetische Felder und Neuronen“ an Erkenntnissen gewonnen wurde. Er stellt den aktuellen Forschungsstand dar, der im Rahmen des Praktikums erzielt werden konnte und weist auf die noch offenen und weiter zu bearbeitenden Themen und Bereiche hin.

Ziel dieses Praktikums war es die Möglichkeit der Wechselwirkung elektromagnetischer Quellen des Alltags mit einem Neuron bzw. einer Systems von Neuronen bzw. eines Nervensystems, wie z.B. dem menschlichen Gehirn zu untersuchen. Besondere Rücksicht wurde auf eines der bekanntesten Neuronenmodelle sowie das selbständige Messen der Felder und dem Benützen moderner biophysikalischer Konzepte gelegt. Es wurden in drei Fachgruppen geforscht - von der Seite der theoretischen Physik, d.h. die physikalische Untersuchung der zugrunde liegenden Phänomene und deren theoretischen Beschreibung, von der Seite der Mathematik, d.h. die mathematische Auseinandersetzung mit einem klassischen Modell des Neurons, dem Hodgkin-Huxley Modell und dessen Adaptierung und die letzte und wahrscheinlich wichtigste Seite der Untersuchung ist die konkrete Messung von elektromagnetischen Quellen des Alltags. Jeder dieser Bereiche wurde von Forschern des jeweiligen Fachbereichs betreut. Die theoretische (Bio-) Physik betreute Florian Wodlei, die mathematische Modellierung betreute Georg Propst und die Elektrotechnik betreute Katrin Friedl.

Das Praktikum war in 3 Phasen geteilt. Die erste Phase galt einer Einführung in die physikalischen Grundlagen, also im wesentlichen in die Elektrodynamik. In der zweiten Phase war es den Teilnehmern frei sich einer der drei Vertiefungsgruppen anzuschließen und sich im Rahmen dieser Gruppe zu vertiefen und in ein Thema einzuarbeiten. In der letzten Phase wurden die Ergebnisse gemeinsam diskutiert und ausgetauscht - deren Ergebnisse man in diesem Bericht einsehen kann.

Ich möchte mich in erster Linie bei Manuel Grill bedanken ohne dem diese Lehrveranstaltung und alle daraus resultierenden Bekanntschaften, Forschungsergebnisse sowie weiterführende Auseinandersetzungen mit diesem Thema nie zustande gekommen wären. Des weiteren bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit des gesamten Lehrendenteams und der Studenten. Ich glaube, dass wir das Ziel ein „interdisziplinäres Praktikum“ durchzuführen mit Erfolg erreicht haben.

Florian Wodlei
Koordinator des interdisziplinären Praktikums

Numerische Simulation des Hodgkin-Huxley Modells

Matthias Fleischhacker
Christoph Wagner
Nikolaus Sabathiel

Aufgabenstellung und Motivation

Ziel unserer Gruppe war es, eine numerische Simulation des Hodgkin-Huxley durchzuführen und dabei zu testen wie sich ein Input in Form eines äußeren Feldes an dem Neuron auf das Aktionspotential auswirkt. Zur Auswertung des Modells wurde die Software Matlab benutzt.

Das Hodgkin-Huxley Modell

Hodgkin und Huxley führten Experimente am Riesen Axon eines Tintenfisches durch und stießen dabei auf 3 verschiedene Ionenkanäle. Basierend auf den Erkenntnissen des Experiments entwickelten sie ein mathematisches Modell des Neurons.

Da das Modell sich nur auf ein einzelnes Neuron beschränkt, kann es sehr präzise Beschreibungen liefern. Bei anderen Systemen, solche welche beispielsweise in neuronalen Netzwerken verwendet werden, sind Neuronen oft idealisiert und werden als reine Informationseinheiten betrachtet. Dies ermöglicht eine große Anzahl an Neuronen zu simulieren, wobei die Information über die interne Funktionsweise oft verloren geht. [1] [2]

Das Neuron

Ein Neuron ist eine funktionelle Einheit des Nervensystems und besteht aus einem Zellkörper, welcher den Zellkern enthält, und aus Fortsätzen, den Dendriten und den Axonen. Axone dienen zur Signalweitergabe, vom Zellkörper ausgehend in Richtung der Zielzelle. [5]

Das Aktionspotential

Das Aktionspotential ist eine wellenförmige Depolarisation (oder Hyperpolarisation), welche durch einen Impuls an der polarisierten Zellmembran eines Neurons ausgelöst wird. Nervenimpulse sind nun Aktionspotentiale, die sich entlang des Axons ausbreiten. [4]

Ruhepotential

Membranpotential im Ruhezustand. Das Membranpotential entsteht durch die unterschiedlichen Ladungen an der Außen- und Innenseite der Zellmembran [4], die eine Spannung v erzeugt.

Die Ionenkanäle

Ein Ionenkanal ist ein Protein, welches Ionen durch eine Membran diffundieren lassen kann. Es gibt selektive Ionenkanäle, diese lassen nur spezifische Ionen passieren. Auch gesteuerte Ionenkanäle kommen vor, diese können öffnen und schließen. [4]

K^+ -Kanal: [3]

- Jeder hat 4 gates, jedes gate kann geöffnet oder geschlossen sein, in Summe müssen jedoch alle 4 gates geöffnet sein, dass der Kanal offen steht
- Alle vier gates in einem Kanal sind ident, alle Kanäle sind ident, alle gates sind ident
- Gates und Kanäle sind unabhängig voneinander
- Die Wahrscheinlichkeit für das Öffnen und Schließen eines gates sind als $\alpha n(v)$ für das Öffnen, sowie $\beta n(v)$ für das Schließen

Na^+ -Kanal: [3]

- Jeder Kanal hat 4 gates, jedes kann geöffnet oder geschlossen sein, in Summe müssen jedoch alle 4 gates geöffnet sein, dass jeder Kanal offen steht
- Es gibt darunter 3 m-gates, welche schnell öffnen, diese drei sind ident (in allen Kanälen)
- 1 h-gate, welches langsam schließt, in allen Kanälen ident
- Gates und Kanäle sind unabhängig voneinander

- Öffnungsraten: $\alpha_m(v)$, $\alpha_h(v)$ Schließungsraten: $\beta_m(v)$, $\beta_h(v)$

Aus diesen Annahmen lassen sich nun folgende Gleichungen bilden, welche in Summe als das Hodgkin-Huxley-Modell bezeichnet werden.
[3]

$$C \frac{dv}{dt} + g(v - E) = i_0(t) \quad (1)$$

$$g = g_{Na} + g_K + g_L \quad (2)$$

$$E = \frac{g_{Na}E_{Na} + g_KE_K + g_LE_L}{g_{Na} + g_K + g_L} \quad (3)$$

$$g_{Na} = \bar{g}_{Na} m^3 h \quad (4)$$

$$g_K = \bar{g}_K n^4 \quad (5)$$

$$g_L = \bar{g}_L \quad (6)$$

$$\dot{m} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m \quad (7)$$

$$\dot{h} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h \quad (8)$$

$$\dot{n} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n \quad (9)$$

C... Membrankapazität

v... Membranpotential

g... Leitfähigkeit

E... Gleichgewichtspotential

α, β ... Öffnungs-/Schließrate

$\dot{m}, \dot{h}, \dot{n}$... Öffnungs-/Schließungsrate

Experimentelle Durchführung Hodgkin und Huxley

Die beiden britischen Forscher untersuchten die Eigenschaften von Axonen und Membranen an den Axonen von Kopffüßern. Dazu verwendeten sie Elektroden um Spannungen zu messen, sie leiteten Strom durch das Axon um das Ruhepotential zu verändern. Zur Zeit ihrer Forschung konnten sie die Eigenschaften der Ionenkanäle lediglich annehmen, da die Technik zur Bestimmung noch nicht vorhanden war. 1980 entwickelten zwei deutsche Forscher (Sakmann, Neher) die Patch-Clamp-Technik. Diese Technik erlaubt es Ströme, welche von einzelnen Ionenkanälen durch Öffnen und Schließen verursacht werden, abzuleiten und zu messen. [4]

MatLab

Durchführung der Simulation und Auswertung der Ergebnisse

Auf Basis des theoretischen Modells von Hodgkin-Huxley wurde ein Algorithmus zur Lösung der Differentialgleichungen erstellt. Dieser wurde in Matlab geschrieben und ausgeführt.

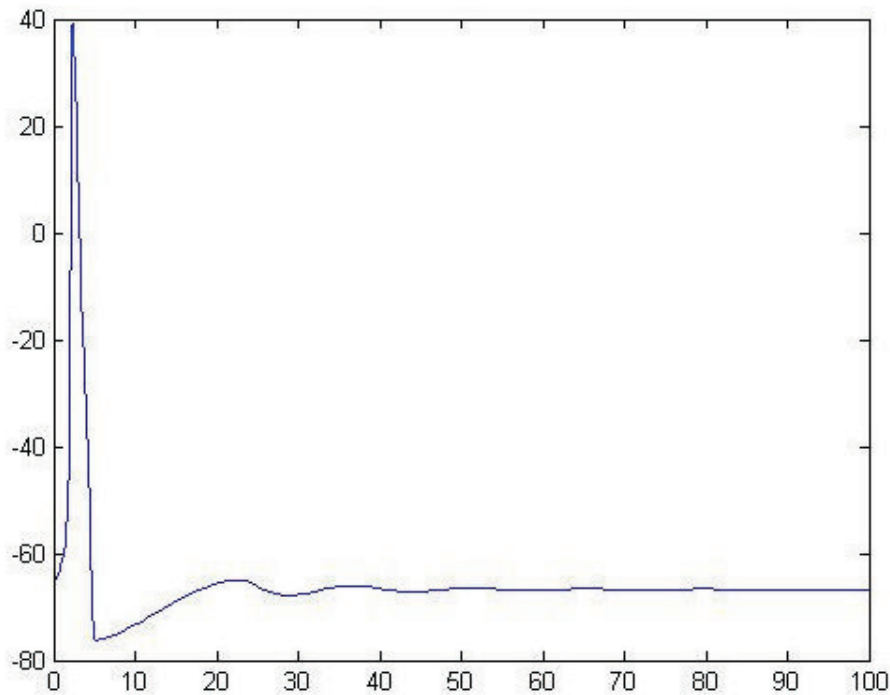


Abb.1.: Diese Grafik zeigt das Aktionspotential ohne äußerem Feld.

In Abbildung 1 kann man gut die einzelnen Phasen der Ladung und Entladung erkennen. Es beginnt mit der Depolarisation bis die Membranspannung ihr Maximum erreicht hat. Daraufhin folgt die Repolarisation, infolgedessen sich die Hyperpolarisation unterhalb des Ruhepotentials ergibt bevor es zu diesem zurückkehrt.

Die Refraktärphase bezeichnet die Zeitspanne von wenigen Millisekunden nach dem Aktionspotential, in denen die Na^+ -Kanäle noch geschlossen bleiben. Da die Na^+ -Kanäle durch einen elektrischen Reiz nicht geändert werden können, kann in diesem Zeitraum kein weiteres Aktionspotential ausgelöst werden.

Die Anfangsbedingungen des Programms wurden aus einem frei zugänglichen Skriptum aus dem Kurs Introduction to Computational Neurophysiology vom Oregon Health and Science University verwendet. [6]

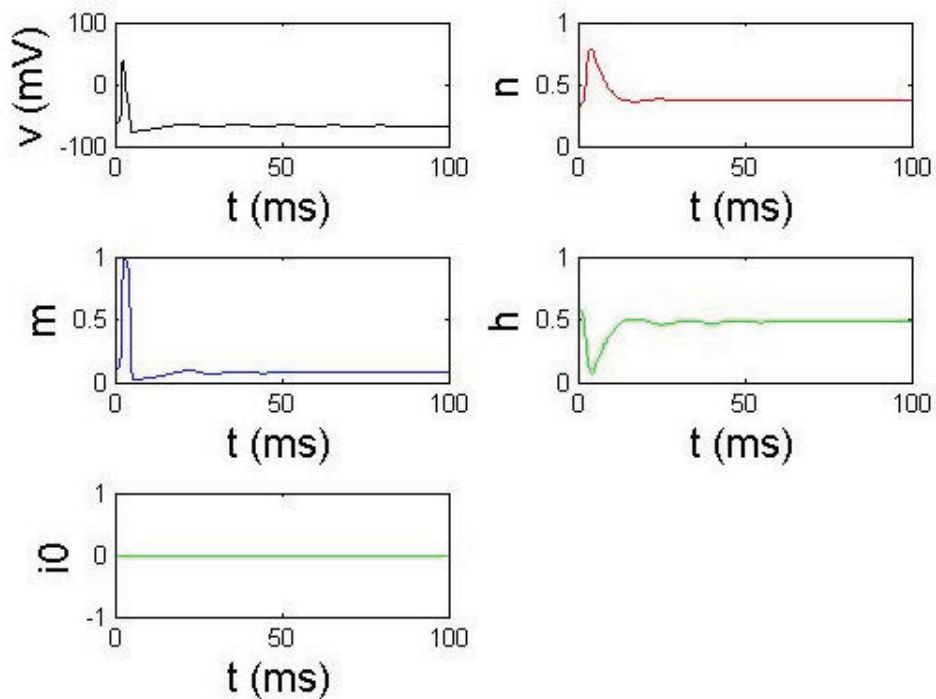


Abb.2.: Hier abgebildet sind die Gatevariablen und nochmals der Verlauf der Membranspannung, sowie der äußere Strom i_0 .

Hodgkin-Huxley Simulation mit angelegtem Strom

Als nächster Schritt wird eine äußere Anregung in Form von i_0 in das Modell eingebaut. Der Strom i_0 bezeichnet den Stromfluss pro Fläche (Mikroampere pro Quadratzentimeter).

Nach einer Phase des Recherchierens und Versuchens wurde ein zeitabhängiges i_0 in folgender Form gewählt:

$$i_0(t) = A * \sin(2\pi ft) \quad (10)$$

Mit $A = 0.1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ und $f = 50 \text{ Hz}$.

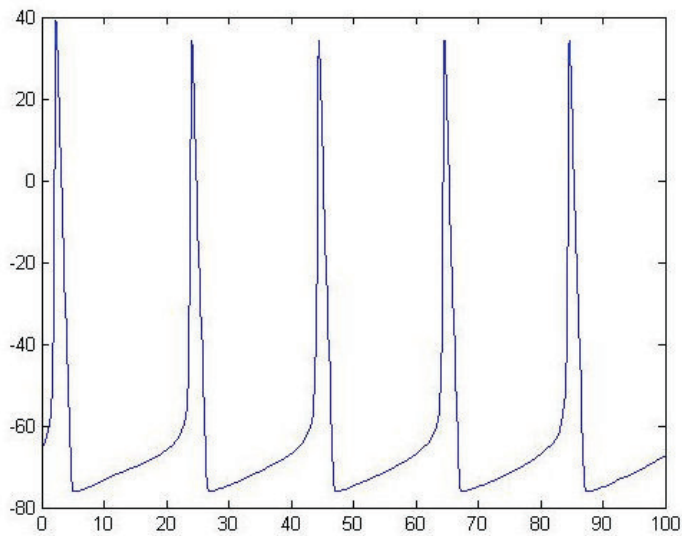


Abb.3.: Hier gut zu erkennen das erste Aktionspotential und die darauf folgenden, ausgelöst durch den Wechselstrom.

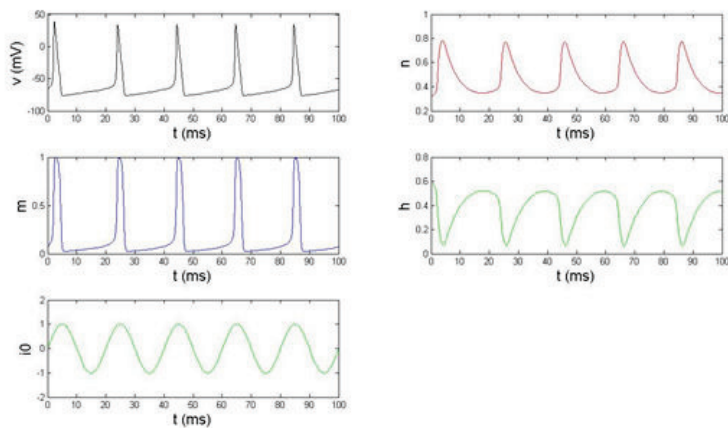


Abb.4.: In dieser Graphik sind die Membranspannung, die Gate-Variablen sowie der äußere Reiz als Funktion der Zeit abgebildet.

Ausblick

Um die Auswirkungen von äußeren elektromagnetischen Feldern auf ein Neuron zu simulieren, werden nun die gemessenen Feldstärken und Frequenzen der experimentellen Gruppe benötigt. Auch die Form des Inputs kann nun nach Absprache mit der experimentellen Gruppe angepasst werden.

Aber auch i_o als Output einer anderen Nervenzelle zu simulieren und

die äußeren Felder direkt in die Membranspannung bzw. in den Ionenfluss einzubinden sollte mit Hilfe dieses Modells kein Problem mehr darstellen.

Um die Auswirkungen von elektromagnetischen Feldern auf Hirnwellen zu simulieren, ist es notwendig, ein Neuronales Netzwerk aufzubauen, und die Hirnwellen verschiedener Frequenzen und Kombinationen untereinander mit den äußeren Wellen wechselwirken zu lassen.

Quellcode

```

function rhs=fff(t,x)

global C e_na e_k e_l g_na g_k g_l g_na_qu g_k_qu g_l_qu f A

%Lösungsvektor

v = x(1);
n = x(2);
m = x(3);
h = x(4);
i0 = x(5);

%Störung
%i0=A*sin(2*pi*f*t);

%Berechnung der Leitfähigkeiten
alpha_m=((v+45)/10)/(1-exp(-(v+45)/10));
beta_m=4*exp(-(v+70)/18);
alpha_h=0.07*exp(-(v+70)/20);
beta_h=1/(1+exp(-(v+40)/10));
alpha_n=(0.1*((v+60)/10))/(1-exp(-(v+60)/10));
beta_n=0.125*exp(-(v+70)/80);

%Leitfähigkeiten
g_na = g_na_qu*m*m*m*h;
g_k = g_k_qu*n*n*n*n;
g_l = g_l_qu;

%Vereinfachung
g=g_na+g_k+g_l;
e=(g_na*e_na+g_k*e_k+g_l*e_l)/(g_na+g_k+g_l);

%Rechte Seite der Differentialgleichung
rhs(1)=(g/C)*(e-v) + i0/C;
rhs(2)=alpha_n*(1-n) - beta_n*n;
rhs(3)=alpha_m*(1-m) - beta_m*m;
rhs(4)=alpha_h*(1-h) - beta_h*h;
rhs(5)= (A/(2*pi*f))*cos(2*pi*f*t);

rhs=rhs';

```

Es folgt der Quellcode der ausführenden Datei mitsamt den Anfangswerten und Deklarationen.

```
global C e_na e_k e_l g_na g_k g_l g_na_qu g_k_qu g_l_qu f A
```

```
%Variablen-Deklaration
```

```
C=1;
g_na_qu=120;
g_k_qu=36;
g_l_qu=0.3;
e_na=50;
e_k=-77;
e_l=-54.3;
f=25e-3;
A=0;
y=[-65 0.318 0.053 0.595 0]';
%y=[0;0;0;0];
```

```
%Zeitintervall
```

```
t0=0;
te=100;
```

```
%-----Lösen der Differentialgleichung-----
```

```
[t,x]=ode15s('fff',[t0 te],y);
```

```
%--- Plotten der Funktionen -----
```

```
figure(1)
plot(t,x(:,1))
figure(2)
subplot(3,2,1)
plot(t,x(:,1), 'k')
xlabel('t (ms)', 'fontsize',16)
ylabel('v (mV)', 'fontsize',16)
subplot(3,2,2)
plot(t,x(:,2), 'r')
xlabel('t (ms)', 'fontsize',16)
ylabel('n', 'fontsize',16)
subplot(3,2,3)
plot(t,x(:,3), 'b')
xlabel('t (ms)', 'fontsize',16)
ylabel('m', 'fontsize',16)
subplot(3,2,4)
plot(t,x(:,4), 'g')
xlabel('t (ms)', 'fontsize',16)
ylabel('h', 'fontsize',16)
subplot(3,2,5)
plot(t,x(:,5), 'g')
xlabel('t (ms)', 'fontsize',16)
ylabel('i0', 'fontsize',16)
```

Literatur/-Quellenverzeichnis

- [1] Seminar „Gepulste Neuronale Netze in Hard- und Software“, Sommersemester 2006, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Technische Informatik, Lehrstuhl für Eingebettete Systeme
- [2] Gerstner, Wulfram, Kistler, Werner. Spiking Neuron Models - Single Neurons, Populations, Plasticity; Cambridge University Press 2002
- [3] Hoppensteadt, Frank C., Peskin, Charles S., Modeling and simulation in medicine and the life sciences 2002
- [4] Purves, William K., Markl, Jue, Biologie 2006
- [5] Trepel, Martin. Neuroanatomie : Struktur und Funktion ; [Online-Zugang + interaktive Extras] 2008
- [6] http://www.bme.ogi.edu/~hayest/BME665/assignments/hh_integrate.m,
Letzter Zugriff: 18. Jänner 2012

Ausgewählte Quellen niederfrequenter Magnetfelder

Konschegg Jutta

Grill Manuel

Reich Julia

Kreuzer Verena

Stromdurchflossene Leiter und Messungen

Dieses Kapitel behandelt Messungen niederfrequenter Felder elektromagnetischer Fernwirkung und ihrer Modellierung.

Elektromagnetische Quellen des Alltages können mit den traditionellen Potentialfeldern der Elektrodynamik beschrieben werden. Bekannt sind das skalare elektrische Potential ϕ [V] und das vektorielle magnetische Potential A [A].

Die Einheit des Vektorpotentials scheint zunächst ungewöhnlich. Jedoch besteht ein Zusammenhang mit den Einheiten Vs/m für das traditionelle Vektorpotential A' und führt letztendlich zu der magnetischen Feldstärke in A/m. In der Literatur, z.Bsp. [1], findet man

$$A'(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C(r')} \mu(r) \frac{I(r') ds(r')}{\|r - r'\|} \left[\frac{Vs}{m} \right] = K_1 \oint_{C(r')} \mu(r) \frac{I(r') ds(r')}{\|r - r'\|} \left[\frac{Vs}{m} \right]. \quad (11)$$

Setzt man K_1 einfach $K_1 = 1$ [1], so bekommt das magnetische Potential mit der Einheit Ampere.

$$A(r) = \oint_{C(r')} \mu(r) \frac{I(r') ds(r')}{\|r - r'\|} [A] \quad (12)$$

Die obige Formel wird in der Abbildung 1 dargestellt.

Gemessen wird diese Fernwirkung durch Drähte, die zu Spulen aufgewickelt sind. Ändert sich das magnetische Potential an den Spulen, z.Bsp. mit der Rate 50 Hz so ändert sich die Richtung der induzierten Ströme 50 mal in der Sekunde.

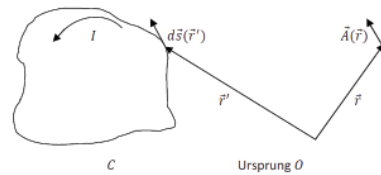


Abbildung 1: Stromdurchflossener Leiter und das dazugehörige magnetische Potential.

Es hat sich im Laufe der Geschichte durchgesetzt, die Fernwirkung über die induzierte Spannung [V] zu messen. Unter Berücksichtigung des Messaufbaus (3 Spulen mit Querschnittsfläche für jede Raumrichtung [m²], Windungen) wird durch die Rate der Änderung [Hz] und die Querschnittsfläche dividiert.

$$\frac{V}{\text{m}^2\text{Hz}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T} \quad (13)$$

Dies ergibt die Einheit Tesla für die magnetische Flussdichte B aus dem Potential A' , mehr dazu in [2]. Aus dem anderen Potential gewinnt man die magnetische Feldstärke H [A/m].

- A [A] $\Rightarrow H$ [$\frac{\text{A}}{\text{m}}$]
- A' [$\frac{\text{Vs}}{\text{m}}$] $\Rightarrow B$ [$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$]

Dieser Übergang erfolgt mittels einer Volumendifferentiation. Das finite Volumen ΔV mit der Oberfläche $S(\Delta V)$ und dem infiniten Flächenelement df bildet

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S df \times A = H. \quad (14)$$

Unberücksichtigt bleibt $df \cdot A$, mit $\hat{n}df = df$ und \hat{n} dem Normaleneinheitsvektor des Flächenstückes. Der Ansatz in der obigen Gleichung (11) zielt bei linearen Leiterstücken darauf ab, dass die Divergenz verschwindet und man ersetzt $(df \cdot A)\hat{n}$ mit dem elektrischen Potential und seinem Feld, siehe [1]. Das ist das Gesetz von Biot-Savart.

Es empfiehlt sich ob der zahlreichen Quellen des Alltages die Inputfelder (A, ϕ) des von den anderen Gruppen zu erstellenden Modelles so allgemein wie möglich (Berechenbarkeit) zu gestalten. Die nächsten Kapitel behandeln Berechnungen bei Freileitungen und Messungen in Wohnräumen mit diversen Haushaltsgeräten.

Freileitungen

Eine mögliche Quelle des Alltages sind Freileitungen. In Österreich teilt man die meisten Freileitungen in 2 Masttypen ein:

- *Donau* und
- *Tonne*.

110kV-Tonne

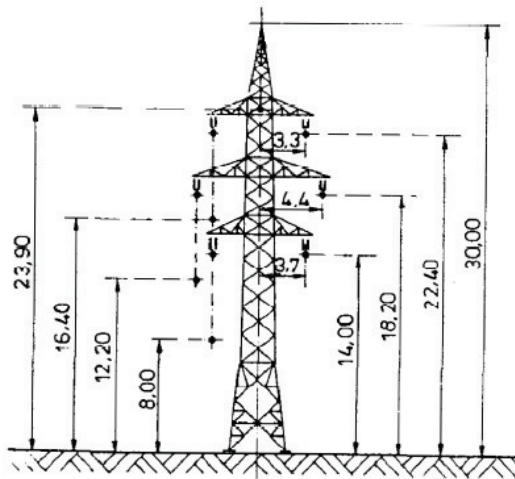


Abbildung 2: Modell *Tonne* bei einer Spannungsebene von 110 kV. Die Leiterbündel hängen durch, weshalb 2 Höhenangaben zu sehen sind.

Die 6 Leiterbündel aus dem Modell *Tonne* haben unterschiedliche Phasenbeziehungen zueinander und je nach Konfiguration ergeben sich andere magnetische Flussdichten. Diese wurden mit Matlab berechnet. Ein kleinen Einblick in die Berechnungen liefern die Abbildungen 3, 4 und 5 im Anhang *Daten und Abbildungen*. Ein Vergleich der Größenordnungen für elektrische Feldstärken liefert Abbildung 6 im selben Abschnitt.

Folgende Größenordnungen der Felder ergeben sich aus den Freileiter-Berechnungen bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A im für Privatpersonen ohne Mehraufwand zugänglichen Bereich (Höhe).

- 10-20 μT
- 0-2 kV/m

Für die anderen Gruppen scheinen vor allem die Größenordnungen von Bedeutung zu sein.

Wohnraum

Messungen der magnetischen Flussdichte wurden in folgende Lebensbereichen durchgeführt:

- Wohnzimmer,
- Schlafzimmer,
- Büro und
- Werkstatt.

Die Ergebnisse sind im Anhang *Daten und Abbildungen* zu finden, siehe Abbildungen 7 bis 11. Kalibriert wurden unsere Messgeräte von der Firma Gigahertz Solutions GmbH. Es werden folgende Größenordnungen der magnetischen Flussdichten für die anderen Gruppen übernommen.

- 0-10 μT für Geräte wie Fernseher und PC (Festplatten) mit minimalem Abstand (Kopf am Gehäuse), siehe Abbildungen 8, 9.
- 0-30 μT für Geräte in der Werkstatt mit minimalem Abstand (Kopf am Gehäuse, Achtung bei Kreissägen), siehe Abbildung 10.
- 0-500 nT für diverse Wohnbereiche mit raumbedingten Abständen von Kopf zu den Quellen, siehe Abbildungen 7, 11.

Daten und Abbildungen

Dieses Kapitel beinhaltet alle wichtigen Abbildungen und Aufzeichnungen der durchgeführten Berechnungen und Messungen.

Die ersten drei Abbildungen 3, 4 und 5 zeigen die berechneten Flussdichten entstehend durch die Ströme beim Masttyp *Tonne* bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A. Durch unterschiedliche Phasenseilbelegung an einem Leiterabschnitt wird versucht die Exposition durch magnetische und elektrische Felder zu minimieren. Bei dem Masttyp *Tonne* gibt es 12 zu untersuchende Möglichkeiten, drei davon werden in den obigen Abbildungen dargestellt. Rot gekennzeichnet ist derjenige Bereich, in dem die Flussdichten die ICNIRP 1998 Referenzwerte überschreiten, siehe [3] und [4]. Die Referenzwerte beziehen sich hierbei nicht auf das von den anderen Gruppen entworfene Modell. Für die Behandlung des elektrischen Potentials bei den Aufgabenstellungen der anderen Gruppen ist die elektrische Feldstärke der selben stromdurchflossenen Leiter von Bedeutung, siehe Abbildung 6. Auch hier variieren die Ergebnisse je nach Phasenseilbelegung, Stromstärke (600 A) und Spannungsebene (110 kV).

Die Daten in den Abbildungen 7 bis 11 stammen aus Messungen, wie in den Kapiteln *Stromdurchflossene Leiter und Messungen* und *Wohnraum* beschrieben.

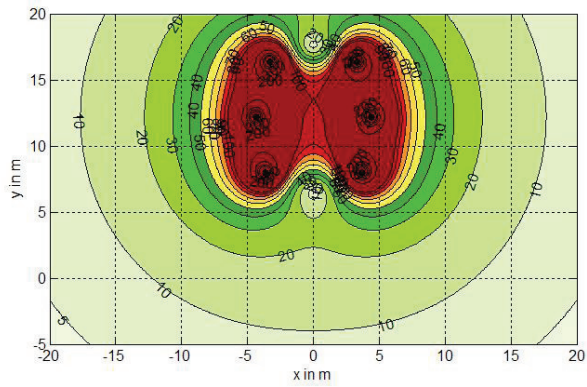


Abbildung 3: Berechnungen der magnetische Flussdichte in μT bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A.

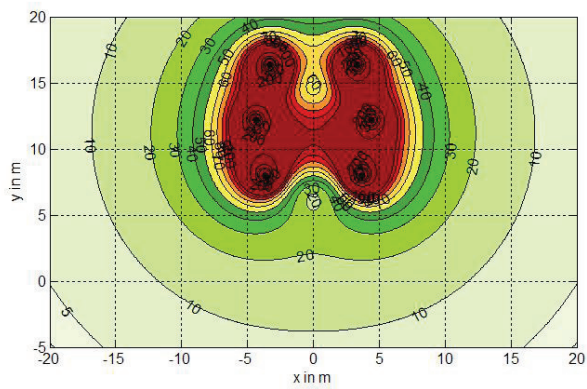


Abbildung 4: Berechnungen der magnetische Flussdichte in μT bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A.

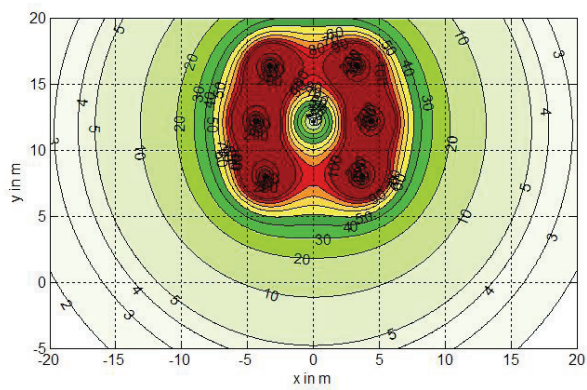


Abbildung 5: Berechnungen der magnetische Flussdichte in μT bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A.

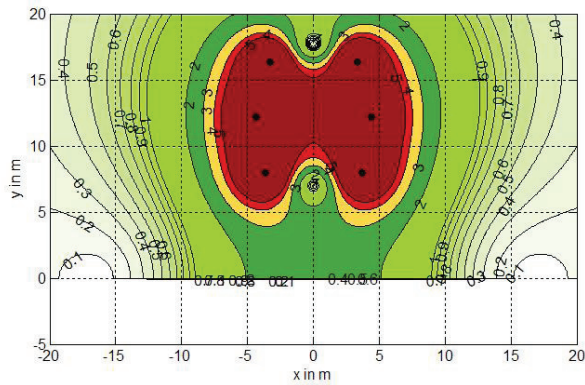


Abbildung 6: Berechnungen der elektrischen Feldstärke in kV/m bei einer Spannungsebene von 110 kV und einer Stromstärke von 600 A.

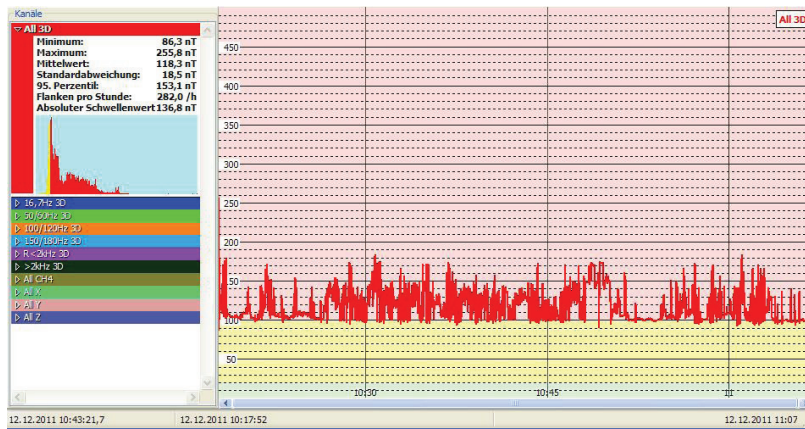


Abbildung 7: Magnetische Flussdichte in nT über rund einer Stunde (Uhrzeit). Die Spitzenwerte sind in diesem Wohnraum inklusive Unterhaltungselektronik (z.Bsp. Fernseher) bei rund 250 nT.



Abbildung 8: Magnetische Flussdichte in nT über rund einer halben Stunde (Uhrzeit). Hier wurde direkt neben einem Fernsehgerät gemessen, d.h. das Messgerät liegt direkt an der Verkleidung des Fernsehgerätes. Das erklärt die Spitzen bei $1,6 \mu\text{T}$. Das Fernsehgerät wurde im Verlauf der Messung ausgeschaltet.

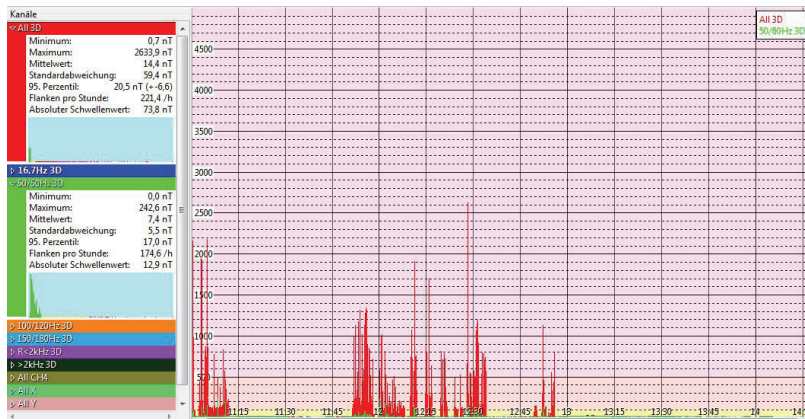


Abbildung 9: Magnetische Flussdichte in nT über rund drei Stunden (Uhrzeit). Hier wurde in einem Büro gemessen. Spitzenwert liegt bei rund $2,6 \mu\text{T}$ (über dem Bereich des Laptops).

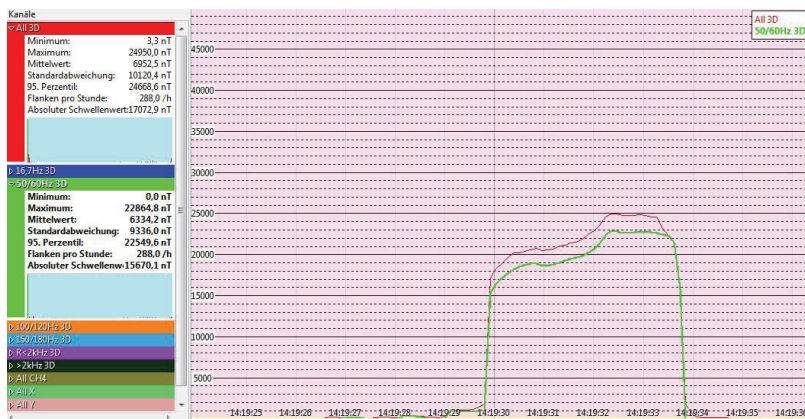


Abbildung 10: Magnetische Flussdichte in nT über rund 10 Sekunden (Uhrzeit). Die Handkreissäge liefert Werte im μTesla -Bereich.

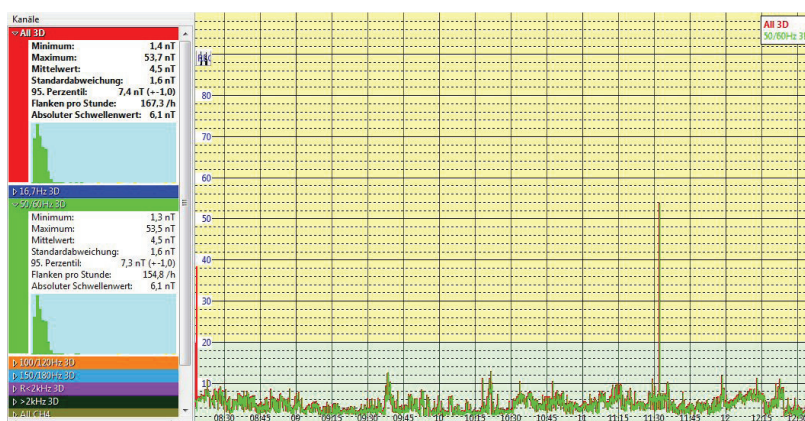


Abbildung 11: Magnetische Flussdichte in nT über rund vier Stunden (Uhrzeit). Im Schlafzimmer liegen die Höchstwerte bei 53 nT.

Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3 - Elektrodynamik*, Springer Verlag, 2007
- [2] CIGRE WG C4.204, *Mitigation techniques of power-frequency magnetic fields originated from electric power systems*, 2009
- [3] ICNIRP, *Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz)*, Health Physics Society, 1998
- [4] ICNIRP, *Guidelines for limiting exposure to time-varying electric and magnetic fields (1 Hz to 100 kHz)*, Health Physics Society, 2010

Modellierung der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit einem neuronalen System

Karnassnigg Astrid
Sabathiel Nikolaus
Schiemel Joerg
Kronlachner Marcella

Ausgangsgleichungen

Um die Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit biologischen Gewebe (bei uns dem Gehirn) zu bestimmen, muss man die dynamischen Maxwellgleichungen in Materie lösen (siehe Gleichung (15) bis (20)). Es wurden zunächst die entsprechenden Stoffkonstanten, d.h. die relative Permittivität ϵ_r , die relative Permeabilität μ_r sowie die elektrische Leitfähigkeit σ recherchiert (für unsere Berechnungen werden wir $\epsilon_r = 113$, $\mu_r = 7,958 \cdot 10^5$ und $\sigma = 0,142 - 1,53$ nach [1] wählen).

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (18)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (19)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (20)$$

Nach einer Idee von Marinova et al. [1] lassen sich die Maxwell-Gleichung in der folgenden Art kombinieren sodass nur mehr die Potentiale darin vorkommen, d.h. $\Phi(\vec{r}, t)$ sowie $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi)] + \vec{j} + \sigma (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi) \quad (21)$$

Wir wollen nun zunächst beide Seiten der Gleichung separat behan-

deln, d.h.

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\epsilon (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi)] = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi) + \epsilon (\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}) \quad (23)$$

wieder zurück in die Gleichung ergibt das

$$\rightarrow \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi) + \epsilon (\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}) + \vec{j} + \sigma (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi) \quad (24)$$

weiter vereinfacht

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}) (\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi) + \vec{j} \quad (25)$$

Bisher haben wir nur die Darstellung der Maxwell-Gleichungen verändert. Um aber unser eigentliches Problem zu lösen, müssen wir uns zunächst über die für unser Problem spezifischen Rand- und Anfangsbedingungen Gedanken machen.

Zunächst wollen wir den menschlichen Kopf und das sich darin befindliche Gehirn durch eine gefüllte Kugel vorstellen, in der sich ein leitende Substanz - das Gehirn befindet. Wir wollen diese Substanz als homogen verteilt annehmen und charakterisiert durch räumlich konstante Stoffparameter (d.h. die relative Permittivität ϵ_r , die relative Permeabilität μ_r sowie die elektrische Leitfähigkeit σ). Diese Kugel befinde sich nun in einem elektromagnetischen Feld, das wir uns erzeugt von einer weit entfernten Dipolantenne vorstellen wollen. Daher können wir die entsprechenden elektromagnetischen Kugelwellen als planar annehmen und weiters das Problem aufgrund der nun entstehenden Zylindersymmetrie in Zylinderkoordinaten formulieren. Wir müssen daher die Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten schreiben

$$(\vec{\nabla} \times \vec{f})_{(\rho\varphi z)} = (\frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}) \vec{e}_\rho + (\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} (\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\varphi) - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}) \vec{e}_z \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) &= \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\rho f_\varphi) - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{f_z}{\rho} \right] \right\} \vec{e}_\rho + \\ &\quad \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\varphi) - \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} \vec{e}_\varphi + \\ &\quad \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (27)$$

Dies führt zu den folgenden Gleichungen, die nun komponentenweise

in Zylinderkoordinaten angegeben sind

$$\vec{e}_\rho : \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi \partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \rho} \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \vec{j}_\rho \quad (28)$$

$$\vec{e}_\varphi : \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \varphi} - \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} (A_\varphi + \rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \vec{j}_\varphi \quad (29)$$

$$\vec{e}_z : \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \rho \left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} \right) \right] - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi \partial z} \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_z + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \vec{j}_z \quad (30)$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie hängen die entsprechenden Potentiale nicht mehr von der φ -Komponente ab, d.h.

$$\phi = \phi(\rho, z), \vec{A} = \vec{A}(\rho, z) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad (31)$$

und dies führt zu

$$\vec{e}_\rho : \frac{1}{\mu} \left\{ -\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \rho} \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + j_\rho \quad (32)$$

$$\vec{e}_\varphi : \frac{1}{\mu} \left\{ -\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} (A_\varphi + \rho \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} \right) \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\varphi \right) + j_\varphi \quad (33)$$

$$\vec{e}_z : \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \rho \left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} \right) \right] \right\} = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_z + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + j_z \quad (34)$$

Die obigen Gleichungen (32) bis (34) stellen nun unser Problem in Zylinderkoordinaten dar. Wir wollen zunächst ohne noch auf die raumzeitlichen Randbedingungen einzugehen, versuchen das gekoppelte Differentialgleichungssystem weiter zu bearbeiten um es soweit als möglich zu entkoppeln. Es zeigt sich allerdings schon, dass die Differentialgleichung in A_ρ bereits entkoppelt ist. Wir werden daher versuchen zunächst diese zu integrieren, d.h.

$$\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{\rho^2} (1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}) - \frac{1}{\rho} (2 \frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] A_\rho = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} A_\rho + j_\rho \quad (35)$$

Wir können diese Gleichung auch verkürzt in Operator Schreibweise angeben

$$XA_\rho = TA_\rho + j_\rho \quad (36)$$

wobei

$$X = X(\rho, z) \quad (37)$$

wir versuchen es nun mit dem folgenden Ansatz

$$A_\varphi = \chi(\rho, z) + \tau(t) \quad (38)$$

sowie

$$j_\varphi = \gamma(\rho, z) + \delta(t) \quad (39)$$

daraus folgt

$$X(\chi + \tau) = T(\chi + \tau) + \delta + \gamma \quad (40)$$

D.h. die beiden Gleichungen für X und T sind nun

$$\begin{aligned} X(\rho, z)\chi &= \gamma \\ T(t)\tau &= -\delta \end{aligned}$$

Wir wollen nun die zweite Gleichung genauer betrachten

$$\begin{aligned} T(t)\tau &= -\delta \\ \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} \tau(t) &= -\delta(t) \\ \Rightarrow \sigma \dot{\tau} + \dot{\epsilon} \tau + \epsilon \ddot{\tau} &= -\delta \end{aligned}$$

unter der Annahme, dass δ eine bekannte Funktion ist und

$$\epsilon \neq f(t)$$

ergibt sich

$$\sigma \dot{\tau} + \epsilon \ddot{\tau} = -\delta$$

Diese Gleichung entspricht einer Schwingungsgleichung und kann durch Aufteilung in eine homogene und eine partielle Gleichung vollständig gelöst werden.

Wir werden zunächst den homogenen Anteil lösen, d.h.

$$\begin{aligned}
\sigma \dot{t} + \epsilon \ddot{t} &= 0 \\
\dot{t} &= x \\
\sigma x + \epsilon \dot{x} &= 0 \\
\sigma x dt &= -\epsilon dx \\
\int \sigma dt &= \int -\frac{\epsilon}{x} dx \\
-\frac{\sigma t}{\epsilon} &= \ln x + \ln x_0 \\
x &= x_0 e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}}
\end{aligned}$$

Nun werden wir die vollständige Lösung der Gleichung durch Variation der Konstanten bestimmen

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t} + x_0 \left(-\frac{\sigma}{\epsilon}\right) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}$$

durch Einsetzen in die komplette Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\epsilon \dot{x}_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t} &= -\delta \\
\int dx_0 &= \int -\frac{\delta}{\epsilon} e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} dt \\
x_0(t) &= -\underbrace{\int \frac{\delta}{\epsilon} e^{\frac{\sigma}{\epsilon}t} dt}_x + C_0 \\
\Rightarrow x(t) &= x_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}
\end{aligned}$$

für τ ergibt sich nach Einsetzen somit:

$$\tau(t) = \int x_0(t) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t} dt + C$$

Somit habe wir eine Lösung für den zeitliche Anteil der φ -Komponente des Vektorpotentials gefunden. Der räumliche Anteil der φ -Komponente des Vektorpotentials lässt sich ähnlich schnell ausrechnen, wird aber hier nicht vorgeführt.

ρ und z-Komponente

Wir wollen nun auch noch versuchen die ρ - und z-Komponente weiter zu bearbeiten, d.h.

$$\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \rho} \right) = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_\rho + \frac{\partial \Phi}{\rho} \right) + j_\rho \quad (41)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \rho \left(\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} \right) \right] \right) = \left(\sigma + \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} A_z + \frac{\partial \Phi}{z} \right) + j_z \quad (42)$$

wobei $\sigma(\rho, \phi, z)$ als bekannt angenommen wird und mit

$$\epsilon \neq f(t)$$

ergibt sich nach Addition

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \\ & \epsilon \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial A_\rho}{\partial t} + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + \underbrace{\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \partial \Phi}{\partial \rho \partial t} + \epsilon \frac{\partial \partial \Phi}{\partial z \partial t}}_{F(\Phi, \rho, z, t, j_\rho, j_z)} + j_\rho + j_z \end{aligned}$$

F ist eine bekannte Funktion, da sowohl Φ als auch j_ρ und j_z als gegeben angenommen werden. Wir wollen nun den Mischterm näher betrachten.

Mischtermproblem

Es handelt sich dabei um den Term, in dem die gemischten Ableitungen zusammengefasst sind - er lautet

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] := D_{z\rho} \vec{A}$$

Dieser Term ist die Ursache dafür, dass die ρ und z -Komponente von nicht auf demselben Weg zu lösen sind, wie die ϕ -Komponente.

Allerdings falls $D_{z\rho} \vec{A} = 0$ folgt¹

¹ die physikalische Rechtfertigung dafür muss noch untersucht werden

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \epsilon \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial A_\rho}{\partial t} + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + F$$

Diese Gleichung wird nun wieder mit der Idee, dass

$$\begin{aligned} A_i &= \beta(i) + \theta(t) \\ F &= \alpha_\rho(\rho) + \alpha_z(z) + \zeta(t) \end{aligned}$$

gelöst.

Insofern gilt, dass

$$\rho = \rho_\rho + \rho_z$$

und somit folgt, dass

$$\tilde{\chi} A_i = \tilde{T} A_i \quad \text{mit } i = \rho, z$$

Diese Gleichung ist also im Prinzip lösbar.

Raumzeitliche Rand- und Anfangsbedingungen

Bisher haben wir uns noch nicht mit den Rand- und Anfangsbedingungen auseinandergesetzt ohne die die bisherigen Rechnungen natürliche keine Bedeutung für unser Probleme haben. Allerdings sind sie uns als Integrationskonstanten im vorigem Abschnitt untergekommen.

Prinzipiell stellt sich uns das folgende Problem für die Rand- und Anfangsbedingungen dar. Die elektrisch geladene und gefüllte Kugel erzeugt durch die biologische Aktivität des Gehirns ein eigenes elektromagnetisches Feld, das auch schon vorhanden ist, wenn sich die Kugel nicht in einem äußeren Feld befindet. Diese stellt eigentlich eine Anfangsbedingung für unser Problem dar, d.h. sozusagen ein $\Phi_o(\vec{r}, t)$ bzw. $\vec{A}_o(\vec{r}, t)$. Das Finden dieser Funktionen ist allerdings schon ein Problem für sich und kann möglicherweise mit Hilfe der Ergebnisse der anderen Forschungsgruppen erzielt werden.

Feldstärkenabschätzung

Wir wollen an dieser Stelle nun auch noch eine grobe Abschätzung der Feldstärke angeben, die sich aus unseren Überlegungen ergeben. Die uns bereits bekannten Größen sind Φ , ϵ , \vec{j} , σ und μ . Wir verwenden nun wieder unsere Ausgangsgleichung

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Phi \right) \right] + \vec{j} + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Phi \right)$$

Wir wollen nun die Differentialoperatoren durch Differenzen ersetzen, d.h.

$$(\delta A)_{1,2} = \frac{\frac{\sigma \mu \Delta x^2}{\Delta t} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2 \mu^2 \Delta x^4}{\Delta t^2} + 4 \left(1 - \frac{\epsilon \mu \Delta x^2}{\Delta t^2}\right) \left(\mu \frac{\Delta \Phi^2}{\Delta t} \Delta x + j \Delta x^2 \mu + \sigma \Delta \Phi \Delta x \mu\right)}}{2 \left(1 - \frac{\epsilon \mu \Delta x^2}{\Delta t^2}\right)}$$

der Wert unter der Wurzel kann mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} &\sim \nu = 1 * 10^9 \text{ Hz} \\ \frac{1}{\Delta t} &\sim 10^9 \\ \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 &\sim 10^{18} \end{aligned}$$

vereinfacht werden zu

$$\sqrt{-4\mu \frac{\epsilon \mu \Delta x^3 \Delta \Phi}{\Delta t^3}}$$

da alle Terme durch Δt^2 aufgrund ihrer geringen Größe wegfallen.
Daher ergibt sich für A

$$(\Delta A)_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{\frac{-4\epsilon\mu^2\Delta x^3\Delta\Phi}{\Delta t^3}}}{-2\frac{\epsilon\mu\Delta x^2}{\Delta t^2}}$$

und zusätzlich mit $\mu = 1$, $\epsilon = 10^{-9}$ folgt

$$(\Delta A)_{1,2} = \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta x}}\Delta\Phi$$

und mit $\Delta t = c\Delta t$ beträgt $(\Delta A)_{1,2}$ ungefähr 10^4 . Für das Magnetfeld ergibt sich daraus somit in großer Schätzung

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$|\vec{B}| = \frac{1}{\Delta x} * 10^{-4} * \Delta\Phi = 10^3 \Delta\Phi$$

Es sind alle Größen in SI-Einheiten zu verstehen.

Literaturverzeichnis

- [1] Iliana Marinova, Valentin Mateev: *Electromagnetic Field Modeling in Human Tissue*. World Academy of Science, Engineering and Technology **64** 2010. p. 298

Abschließende Bemerkungen und Ausblick

Florian Wodlei

Um ein umfassendes und aussagekräftiges Modell der Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern und neuronalen Systemen zu erstellen - oder anders ausgedrückt den Einfluss elektromagnetischer Felder auf den Organismus zu verstehen - müssen noch weitere Forschungen unternommen werden.

Im Rahmen dieses Praktikums wurden allerdings die Grundzüge und ersten Ansätze erarbeitet um dieses Ziel in absehbarer Zeit zu erreichen.

Viel versprechend sind die Ansätze, die im Rahmen der mathematischen Modellierung entstanden sind und darauf abzielen ein System von Neuronen im Sinne eines "künstlichen neuronalen Netzwerks"(engl. artificial neural network = ANN) zu entwickeln. Diese Daten könnten dann in weiterer Folge als Anfangsbedingungen für das Modell verwendet werden, das im Rahmen der physikalischen Modellierung entstanden ist.

Da es sich allerdings um ein im Bezug auf die Anfangsbedingungen des physikalischen Modells nichtlinear verkoppeltes System handelt - mathematisch ausgedrückt um ein Fixpunktproblem - könnte ein iteratives Lösen des Systems sinnvoll und Ziel führend sein.

D.h. beginnend mit der Lösung des ANN, die nun als Anfangsbedingung in das physikalische Modell eingesetzt wird, wird das physikalische Modell gelöst und diese Lösung wieder als Anfangsbedingung für das ANN eingesetzt usw.

Ebenfalls sehr hilfreich sind die gemessenen magnetischen Daten der Elektrotechnik Gruppe, die uns nun einen ersten Einblick in die Größenordnung der magnetischen Felder gewähren konnten, mit denen es der Mensch in seiner direkten Umgebung zu tun hat. Diese Daten sind essentiell und müssen zum Lösen des ANN herangezogen werden.

Die weiteren Forschungen, die, wie oben erwähnt, für eine umfassende und aussagekräftiges Modell nötig sind, betreffen daher alle Bereiche und gliedern sich grob wie folgt.

Im Rahmen der mathematischen Modellierung müssen weitere Forschungen unternommen werden das Hodgkin-Huxley Modell soweit zu adaptieren damit es im Rahmen eines ANN Zugangs sinnvolle Daten liefern kann. Oder aber die Entwicklung eines grundsätzlich neuen Modells, das die Fähigkeit besitzt, die vom Hodgkin-Huxley Modell erzeugten Resultate auch im Rahmen des ANN zu behalten. Da man an diese Aufgabe wohl kaum mehr ohne die Hilfe der numerischen Mathematik herangehen wird können, ist es auch notwendig in diesem Bereich Forschungen anzustellen.

Im Rahmen der physikalischen Modellierung hat sich bereits am momentanen Niveau angekündigt, dass eine sinnvolle Bearbeitung des Modells ebenfalls nur mehr mit Hilfe der numerischen Integration der zugrunde liegenden mathematischen Differentialgleichungen möglich sein wird. Daher wird es auch hier notwendig sein im Bereich der numerischen Mathematik Forschungen anzustellen.

Im Rahmen der elektrotechnischen Messungen wird es nötig sein auch in den Bereich der elektrischen Strahlungen einzudringen und somit ein umfassendes Bild der elektromagnetischen Felder zu liefern mit denen der Mensch täglich konfrontiert wird.

Abschließend kann man also zusammenfassen, dass die bisherigen Erkenntnisse und Ergebnisse viel versprechend sind und uns allen einen tieferen Einblick in die Natur der zugrunde liegenden Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit neuronalen Systemen gewähren konnten. Andererseits bemerken wir aber auch, dass wir erst am Anfang stehen und noch weitere intensive Forschungen nötig sind um ein umfassendes und aussagekräftiges Modell der oben angesprochenen Wechselwirkung zu erstellen.