Klassische Elektrodynamik

Theoretische Physik III

Ausarbeitung nach dem Buch
Jackson: Classical Elektrodynamics

Inhaltsverzeichnis

WS05

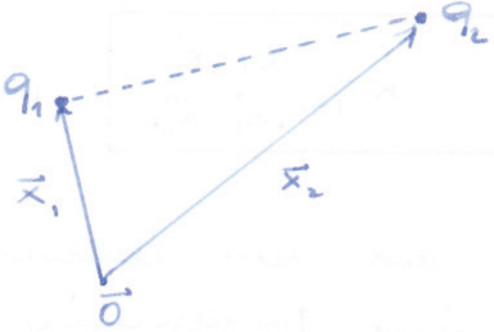
Theoretische Physik 2: Elektrodynamik

1. Elektrostatik

In diesem Kapitel geht es um die Untersuchung ruhender Ladungsverteilungen und ihrer Felder. D.h. die Felder sind zeitunabhängig.

1.1. Das Coulomb'sche Gesetz

Die gesamte Elektrostatik beruht auf dem Coulomb'schen Gesetz. Es beschreibt in quantitativer Weise die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, deren gegenseitiger Abstand im Vergleich zu ihrer Ausdehnung groß ist und die sich relativ zueinander in Ruhe befinden.



$$\boxed{\vec{F} = k q_1 q_2 \cdot \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}} \quad (1.1)$$

Ferner zeigt das Experiment, das die Gesamtkraft, die ein kleiner geladener Körper von einem System anderer Ladungen erfährt, gleich der Vektorsumme der einzelnen Coulomb'schen Zweikörperkräfte ist.

1.2. Das elektrische Feld

Obwohl letzten Endes immer Kräfte gemessen werden, ist es hilfreich ein anderes Konzept einzuführen: Das elektrische Feld. Eine bestimmte Ladungsanordnung wird als Erzeugende des elektrischen Feldes aufgefasst.

Wir definieren das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ als die auf die Ladungseinheit bezogene Kraft.

$$\boxed{\vec{E}_q(\vec{x}) = \frac{\vec{F}}{q}} \qquad (1.2)$$

D.h.

$$\vec{E}_{q_1}(\vec{x}) = \frac{1}{\cancel{q_1}} k \cancel{q_1} q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} =$$

$$= k\, q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{q_1}(\vec{x}) = k\, q_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}} \qquad (1.3)$$

Formel (1.3) beschreibt also das elektrische Feld am Ort $\vec{x}_1$, das von einer Punktladung q_2 am Ort $\vec{x}_2$ herrührt.

Die Konstante k hängt vom gewählten Einheitensystem ab:

$$k_{SI} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8{,}987 \cdot 10^9 \frac{m}{F}$$

$$k_{cgs} = 1$$

(näheres zu den Einheiten und Umrechnungen siehe A.1)

Wir werden im Folgenden das cgs-System verwenden.

Die schon angesprochene lineare Superposition, der von mehreren Ladungen ausgeübten Kräfte bedeutet, dass sich das elektrische Feld am Ort $\vec{x}$ eines Systems von n Punktladungen q_i an den Orten x_i als Vektorsumme schreiben lässt (nach (1.3)):

$$\boxed{\vec{E}_{(\vec{x})} = \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}} \quad (1.4)$$

Sind die Ladungen nicht punktförmig sondern besitzen eine gewisse Ausdehnung dV und wäre ihre Ladung nach $\rho(\vec{x})$ über das Volumen verteilt so wäre das elektrische Feld:

$$d\vec{E}_{(\vec{x})} = \sum_{i=1}^{n} dq_i \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} = \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{x}_i)\, dV_i \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} =$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d\vec{E}_{(\vec{x})} = \sum_{i=1}^{n} \rho_{(\vec{x}_i)}\, dV_1 \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3}} \quad (1.5)$$

Sind jetzt die Ladungen so eng beieinander, kann man die diskrete Ortsangabe durch eine kontinuierliche Ortsangabe ersetzen $\left(\sum_{i=1}^{n} \rightarrow \int_{\Omega} \right)$:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\Omega} \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, dV} \quad (1.6)$$

Man kann formell von (1.6) nach (1.4) kommen, indem man die δ-Distribution verwendet:

Man setzt jetzt $\rho(\vec{x}') = \sum_{i=1}^{n} q_i \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)$

$$\Longrightarrow (1.6) \quad \vec{E}(\vec{x}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} q_i \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \, dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_i \int_{\Omega} \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \, dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \qquad \text{(entspricht (1.4))}$$

□

In Analogie zur Mechanik kann man die schreiben als:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_1^2 q \vec{E} \cdot d\vec{x} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} \overset{\text{sollte}}{=}$$

$$= U_{(2)} - U_{(1)} \quad \Longrightarrow \quad q \vec{E} = -\vec{\nabla} U(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \underbrace{\frac{1}{q} U(\vec{x})}_{\phi(\vec{x})} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

$$\rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}) \overset{(1.6)}{=} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \, d\vec{x} \overset{\text{sollte}}{=} -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$$

Für die weitere Berechnung betrachten wir zunächst:

$$\nabla_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \ldots\ldots \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + \ldots\ldots}}, \ldots\ldots \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[(x - x')^2 + \ldots\ldots \right]^{-\frac{1}{2}}, \ldots\ldots\ldots \right) = \left(-\frac{1}{2} \left[(x - x')^2 + \ldots\ldots \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(x - x'), \ldots\ldots \right)$$

$$= -\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\left(x-x', y-y', z-z'\right) = -\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') =$$

$$= -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

oder sphärisch:

$$\nabla_{\vec{x}}\frac{1}{\underbrace{|\vec{x}-\vec{x}'|}_{\vec{r}}} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{|\vec{r}|} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}, 0, 0\right) = \left(-\frac{1}{r^2}, 0, 0\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = \underline{-\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}$$

$$\Rightarrow \quad -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x}) = \int_\Omega \rho(\vec{x}')\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d\vec{x} = -\int_\Omega \rho(\vec{x}')\,\vec{\nabla}_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{r} =$$

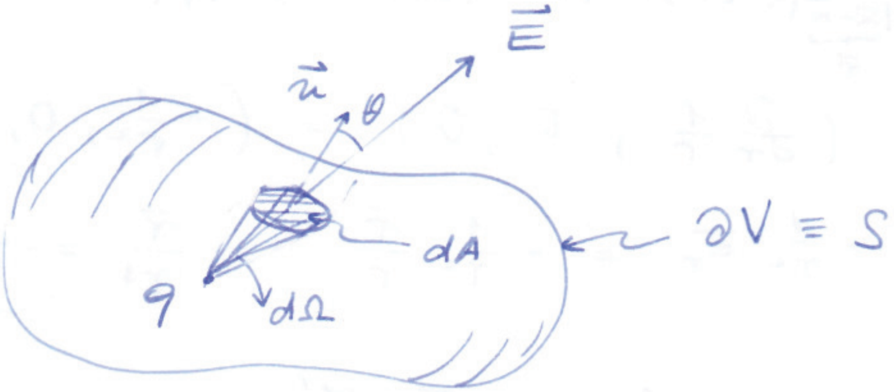
$$= -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\int_\Omega \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{r} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\,\phi(\vec{x})$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\phi(\vec{x}) = \int_\Omega d\vec{r}\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \quad (1.7)$$

Das skalare Feld $\phi(\vec{x})$ wird als das elektrostat. Potential bezeichnet

1.3. Das Gaußsche Gesetz

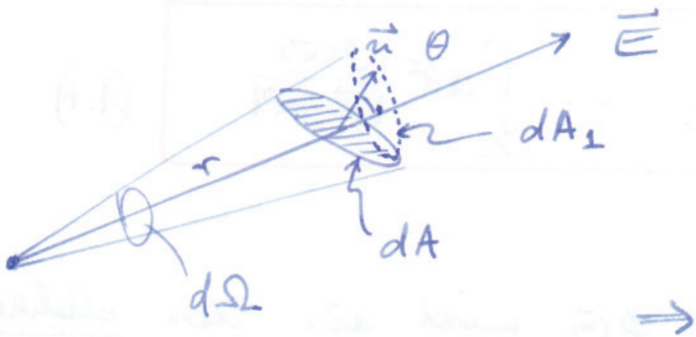
Das Integral (1.6) ist nicht immer dazu geeignet elektrische Felder zu berechnen (siehe A.2). Es gibt jedoch eine andere Integralbeziehung, die zu einer Differentialgleichung für $\vec{E}(\vec{x})$ führt:



Wir definieren den elektrischen Fluss Φ_E derart:

$$\boxed{\Phi_E = \int_A \underbrace{dA\cdot\vec{n}}_{\equiv \vec{dA}}\cdot\vec{E}} \quad (1.8)$$

Betrachten wir den infinitesimalen Kegel etwas genauer:



wir wissen $dA_\perp = r^2 d\Omega$ *

und $dA_\perp = \cos\theta\, dA$

$$\Rightarrow \cos\theta\, dA = r^2\, d\Omega$$

$$\rightarrow d\Omega = \frac{\cos\theta\, dA}{r^2}$$

Wir schreiben nun den diff. Fluss durch dA:

$$d\Phi_E = dA\, \vec{n}\cdot\vec{E} = dA \underbrace{|\vec{n}|}_{1} \underbrace{|\vec{E}|}_{\frac{q}{r^2}} \cos\theta = q \underbrace{\frac{\cos\theta\, dA}{r^2}}_{d\Omega}$$

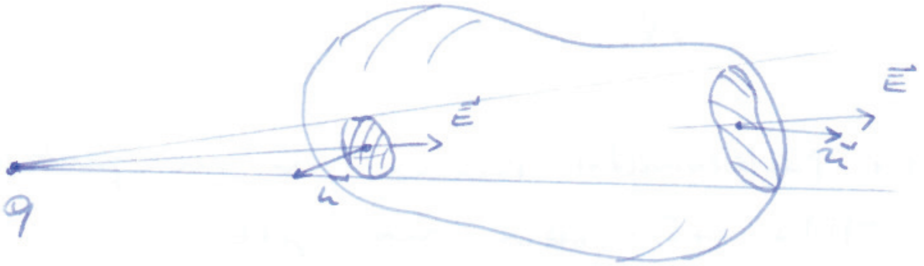
(* aus Definition Steradiant)

$$\Rightarrow \quad d\Phi_E = q\, d\Omega$$

Es folgt also der gesamte Fluss über die Oberfläche:

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} d\Phi_E = \oint_{\partial V} q\, d\Omega = q\oint_{\partial V} d\Omega = q\, 4\pi = \underline{\underline{4\pi q}}$$

Was aber, wenn die Ladung außerhalb des Volumens sich befindet?



Es gilt wieder $\quad d\Phi_E = dA\,\vec n\cdot\vec E = dA\,\vec n\cdot|\vec E|\cdot\vec e_r =$

$$= dA\,\frac{q}{r^2}\,\vec n\cdot\vec e_r = q\,\underbrace{\frac{\vec n\cdot\vec e_r\, dA}{r^2}}_{} = q\,\frac{|\vec n|\,|\vec e_r|\, dA\cos\theta}{r^2}$$

$$= q\,\frac{\cos\theta\, dA}{r^2}$$

$d\Omega$ von q aus gesehen!

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = \oint_S d\Phi_E = q\oint_S \frac{\cos\theta\, dA}{r^2} = \%$$

wobei hier die Oberfläche in Teile, die zu q "schauen" und Teile die von q "wegschauen", wobei $\cos\theta = f(\vec e_r)$

$$\% = q\left(\int_{\{\partial V:\, \cos\theta<0\}} f(\vec e_r)\,\frac{dA}{r^2} + \int_{\{\partial V:\, \cos\theta>0\}} (-f(\vec e_r))\,\frac{dA}{r^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_E = \oint_{\partial V} dA\,\vec n\cdot\vec E = \begin{cases} 4\pi q & \text{für } \vec x_q \in V \\ 0 & \text{für } \vec x_q \notin V \end{cases}} \quad (1.9)$$

(1.9) wird das Gauß'sche Gesetz genannt.

Man kann nun wieder analog zum Schritt von (1.4) zu (1.6) q derart auffassen:

$$q = \int_{\Omega} \rho(\vec{x})\, dV$$

$$\overset{(1.9)}{\Longrightarrow} \qquad \oint_{\partial V} dA\, \vec{n}\cdot\vec{E} = 4\pi \int_{\Omega} \rho(\vec{x})\, dV \qquad (1.10)$$

Aus der Mathematik kennen wir den Gauß'schen Satz (siehe MM3 -(45)) nach dem gilt:

$$\oint_{\partial V} dA\, \vec{n}\cdot\vec{E} = \underline{\int_{\Omega} dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \overset{(1.10)}{=} 4\pi \int_{\Omega} \rho(\vec{x})\, dV}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} - 4\pi \int \rho(\vec{x})\, dV = 0$$

$$\int_{\Omega} dV \left(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - 4\pi\rho(\vec{x})}_{\text{muß null sein}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})} \quad (1.11)$$

Dies stellt die 1. Maxwell-Gleichung dar.

unter Verwendung, dass $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ ist folgt:

mit (1.11) :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{(\vec{x})} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\phi_{(\vec{x})}\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi_{(\vec{x})} = -\Delta\phi_{(\vec{x})} =$$

$$\overset{(1.11)}{=} 4\pi\rho(\vec{x})$$

Daraus folgt eine Differentialgleichung für $\phi(\vec{x})$ vom elleptischen Typ:

$$\boxed{\Delta\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})} \quad (1.12)$$

Diese Gleichung wird Poisson-Gleichung genannt für $\rho(\vec{x}) \neq 0$ und für $\rho(\vec{x}) = 0$ ist dies die Laplace-Glg.

Wenn wir uns Glg. (1.12) ansehen, sehen wir eine Glg. in 3 Unbekannten:

$$\partial_x^2 E_{x(\vec{x})} + \partial_y^2 E_{y(\vec{x})} + \partial_z^2 E_{z(\vec{x})} = 4\pi\rho(\vec{x})$$

um die drei Komponenten E_x, E_y, E_z festzulegen, genügt diese Glg. noch nicht. Wir suchen daher eine weitere Glg. für $\vec{E}(\vec{x})$:

Wir wissen $\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)$

und $\quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \epsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\partial_l\phi\,\vec{e}_l\right)_k\vec{e}_i =$

$$= \epsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi\,\vec{e}_i = \epsilon_{123}\,\partial_2\partial_3\phi + \epsilon_{132}\,\partial_3\partial_2\phi + \text{ähnlich} =$$

$$= \underbrace{\epsilon_{123}\,\partial_2\partial_3\phi - \epsilon_{123}\,\partial_3\partial_2\phi}_{0 \text{ wegen Schwarz}} + \text{ähnlich} = \vec{0}$$

daraus folgt eine weitere Gleichung für $\vec{E}(\vec{x})$

⇒

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x}) = 0} \quad (1.13)$$

Diese Gleichung ist als zweite Maxwell'sche Glg. bekannt.

⇒ Zusätzlich zu $\begin{cases} \vec{\nabla}\overset{2}{\cdot}\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x}) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x}) = 0 \end{cases}$

stellt 4 Gleichungen (gekoppelt) mit 3 Unbekannten dar.

Man kann aber $\vec{E}(\vec{x})$ anders finden mittels (1.12). Indem man $\phi(\vec{x})$ findet und $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ rechnet! Die Lösung ist uns schon bekannt aus (1.7). Wir werden in weiterer Folge die Details der Lösung der Glg. (1.12) besprechen.

1.4. Poissonsche und Laplacesche Gleichung

laut (1.12):

$$\Delta\,\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$$

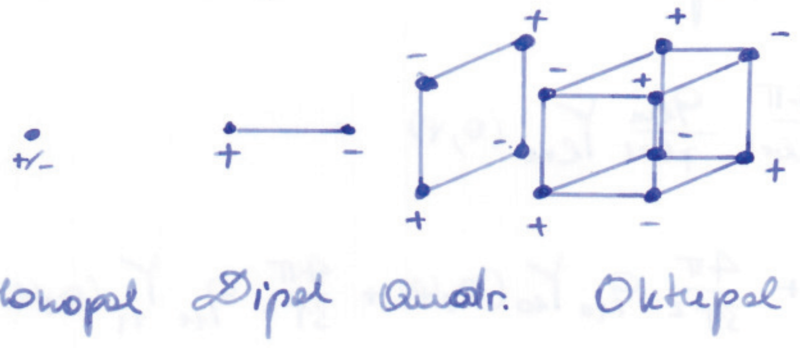
Wie löst man diese Differentialgleichung. z.B. mittels Green-Funktion:

1.4.1. Formale Lösung mittels Greenfunktion

Es gilt $\quad \Delta G(\vec{x}-\vec{y}) = -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$

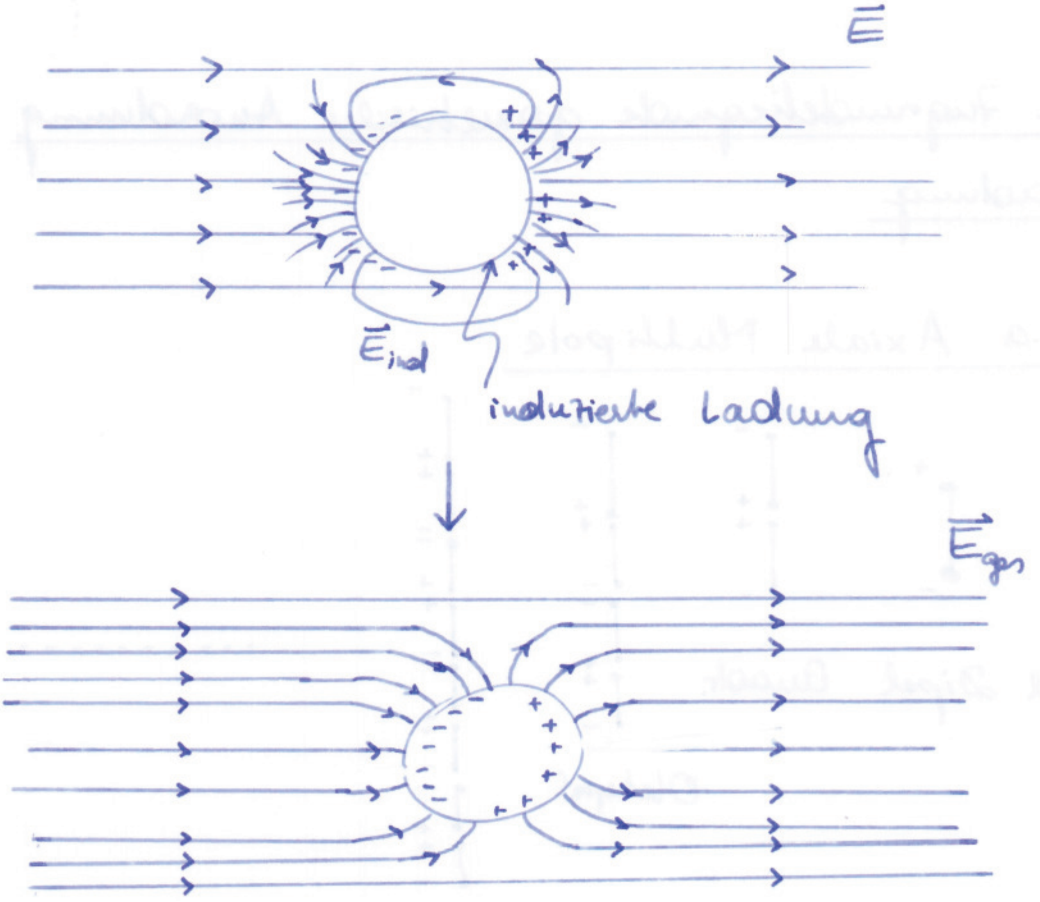
mit $\phi(\vec{x}) = (G * \rho)(\vec{x})$ (siehe A.3 bezüglich Anwendbarkeit der Green'sche Methode)

1.4.7.1.b. Allgemeine Multipole



1.5. Elektrostatik der Dielektrika (Isolatoren)

Isolatoren oder Dielektrika sind das Gegenteil der Metalle oder Leiter. Im Metalle haben wir gesehen, dass $\vec{E} = 0$ (siehe A.12):

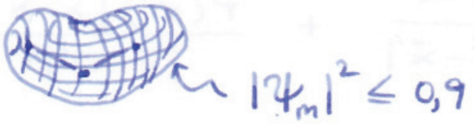


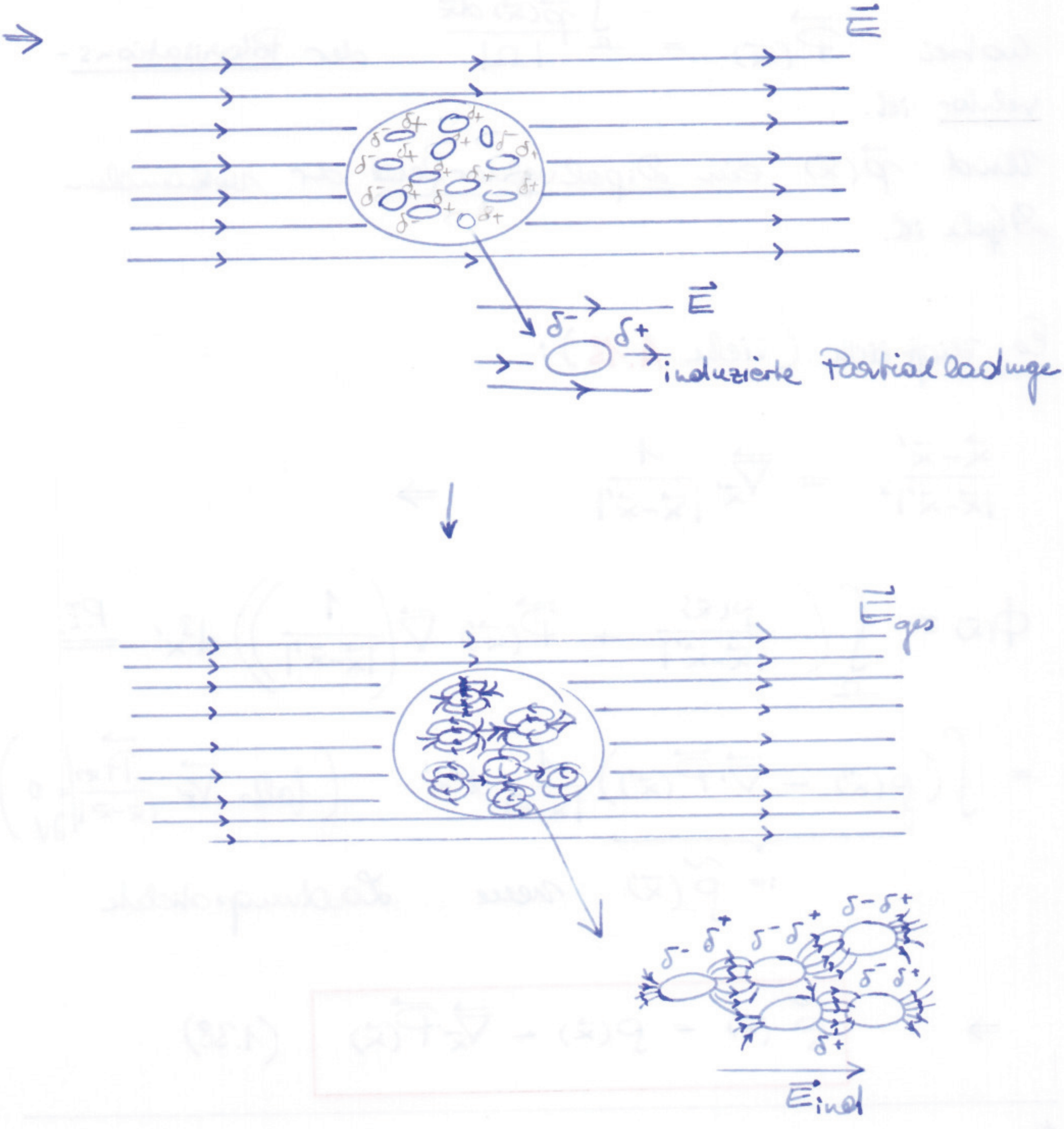
Offen bleibt aber das Verhalten des Feldes im Dielektrikum.

Da Elektrostatik ist der Strom null. Die Gesamt=

ladung ist Q = 0.

Wir wollen uns das Dielektrikum aufgebaut aus neutralen Molekülen vorstellen, deren elektronische Struktur durch die Lösung der Schrödingergleichung gegeben ist:





Aufgrund des angelegten elektrischen Felds, werden im

Molekül Partialladungen δ^+, δ^- induziert, die zu $\vec{E}_{ind}$ führt.

Aufgrund dieser Tatsache, werden wir das (mikroskop.) Potential nur bis zum Dipolterm entwickeln *:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_\Omega \left(\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\right)\right) d^3x' =$$

wobei $\vec{P}(\vec{x}) = \frac{\int_\Omega \vec{p}(\vec{x})\, d\vec{x}}{|\Omega|}$ der Polarisationsvektor ist.

Und $\vec{p}(\vec{x})$ ein Dipolvektorfeld der vorhandenen Dipole ist.

Es zeigt sich (siehe A.13):

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(\vec{x}) \cong \int_\Omega \left(\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}')\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\right) d^3x' \overset{P.I.}{=}$$

$$= \int \Big(\underbrace{\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{x}')}_{:= \tilde{\rho}(\vec{x}') \text{ neue Ladungsdichte}} \Big) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \qquad \left(\text{falls } \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\Big|_{\partial V} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\rho}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{P}(\vec{x})} \quad (1.38)$$

---

*

Würde sich der Isolator in einem Feld befinden, das von einem Multipol erzeugt wird, müsste man auch höhere Terme mitnehmen. (Der Isolator würde dann Multielektrikum heißen)

Wobei $\rho_P(\vec{x}) := -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}_{(\vec{x})}$ die <u>Polarisationsladungsdichte</u> ist.

Wie sieht das gesamte elektrische Feld nun aus? Aus (1.11) folgt:

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}}\cdot\vec{E}_{(\vec{x})} = -\Delta_{\vec{x}}\phi_{(\vec{x})} = -\Delta_{\vec{x}}\int\left(\rho(\vec{x}\,') - \vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\vec{P}_{(\vec{x}\,')}\right)\frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} =$$

$$= -\int\left(\rho(\vec{x}\,') - \vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\vec{P}(\vec{x}\,')\right)\underbrace{\Delta_{\vec{x}}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\right)}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')}d^3x' =$$

$$= 4\pi\int\left(\rho(\vec{x}\,') - \vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\cdot\vec{P}(\vec{x}\,')\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\,d^3x' =$$

$$= 4\pi\,(\underbrace{\rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_{\vec{x}}\cdot P_{(\vec{x})}}_{\tilde{\rho}}) = 4\pi\tilde{\rho}(\vec{x}) \qquad \square.$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \qquad \Big| + 4\pi\vec{\nabla}\vec{P}$$

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{E}+4\pi\vec{P}}_{:=\vec{D}}) = 4\pi\rho$$

<u>elektrische Induktion</u>
(Verschiebungsdichte)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_{\vec{x}}\vec{D}_{(\vec{x})} = 4\pi\rho(\vec{x})} \quad (1.39)$$

(1.39) stellt die 1. Maxwellglg in Materie dar.

1.5.1. Arten der Polarisation

1.5.1. a Deformationspolarisation

Deformationspolarisation liegt vor, falls die Polarisation erst durch die Deformation der el. Struktur der Moleküle auftritt. D.h. die Polarisation ist **nur** durch das Feld induziert:

Allgemein: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}) \Rightarrow P_i = P_i(E_1, E_2, E_3)$

$$\Rightarrow P_i \overset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{P_i(0,0,0)}_{0} + \sum_j \left.\frac{\partial P_i}{\partial E_j}\right|_{E_j=0} E_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \left.\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_j \partial E_k}\right|_{E_j,E_k=0} \cdot E_j E_k + \dots$$

1.5.1.b. Orientierungspolarisation

Orientierungspolarisation liegt vor, wenn von Anfang an eine Polarisation vorliegt.
Stoffe, die diese Eigenschaften tragen werden allgemein **Elektret** (analog zum Magnet) genannt.
Es gibt 2 Arten:

a) **permanent Elektrete** (werden erzeugt durch Abkühlen von Polymerschmelzen (z.B. Polytetrafluorethen) unter Anwesenheit eines elektrischen Feldes).

b) **Ferroelektrika** sind Kristalle (z.B. Bariumtitanat $BaTiO_3$)

Wenn wir in Formel (3.2) den Strom nach Formel (2.1) schreiben:

$$I = \vec{j} \cdot d\vec{A} = \rho \vec{v} \, d\vec{A}$$

$$\Rightarrow I d\vec{l} = \rho \vec{v} \underbrace{d\vec{A} \, d\vec{l}}_{d^3x'} = \vec{j} \, d^3 r'$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{B}(\vec{x}) = \frac{d^3x'}{c} \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \quad (3.3)$$

Die Integrale Form lautet

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}} \quad (3.4)$$

Dies ist das Gesetz von <u>Biot-Savart</u>.

3.2. Elektromagnetische Kraft

Diese Kraft wird vom Magnetfeld erzeugt und wirkt auf Ströme. Der Versuch zeigt, dass das Magnetfeld $\vec{B}$ mit der Kraft

$$|\vec{F}| = B I l$$

auf den Strom wirkt, wobei die Orientierung von I wieder eine Rolle spielt:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I \, \vec{l} \times \vec{B}} \quad (3.5)$$

Die Kraft, die nur auf einen Ladungsträger wirkt, heißt Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{F}}{N} = \frac{1}{N}\frac{Q}{t}\vec{l}\times\vec{B} = \frac{1}{\cancel{N}}\frac{q\cancel{N}}{t}\vec{l}\times\vec{B} = q\frac{\vec{l}}{t}\times\vec{B} =$$

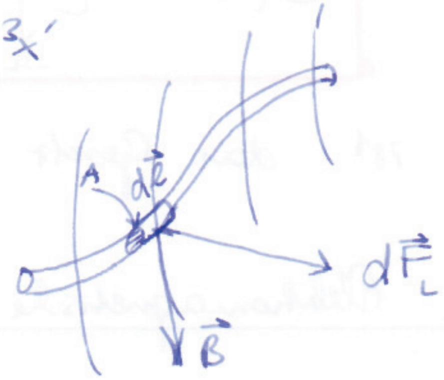
$$= q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}}$$

Falls der Strom nicht geradlinig ist und durch einen ausgedehnten Draht der Querschnittsfläche A fließt folgt aus (3.5):

$$d\vec{F}_L = \frac{I}{c}d\vec{l}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{j}\,d^3x'\times\vec{B} =$$

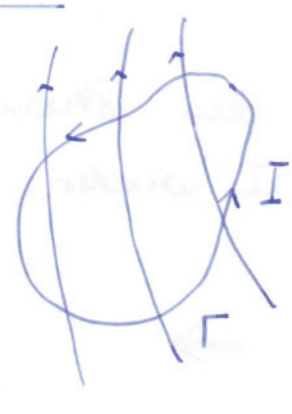
$$= \frac{1}{c}j(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')\,d^3x'$$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{L(\vec{x})} = \frac{1}{c}\int_\Omega d^3x'\,j(\vec{x}')\times\vec{B}(\vec{x}')} \quad (3.6)$$

Dies ist das Gesetz von Ampère

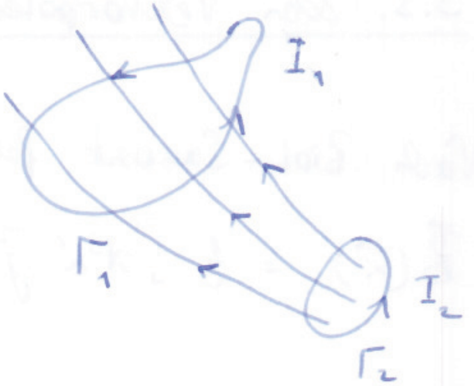
Für die Berechnung der elektromagn. Kraft womit das Feld $\vec{B}$ auf die Schleife Γ (die von I durchflossen wird) wirkt, integrieren wir Formel (3.5):



$$d\vec{F} = \frac{I}{c}\, d\vec{l} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{I}{c} \int_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}$$

Nehmen wir jetzt an, dass das Feld $\vec{B}$ von einem 2. Strom I_2 erzeugt wird, dann ist die Kraft womit I_2 auf I_1 wirkt:

$$\vec{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \int_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$



$(3.4) + I_2 d\vec{l}_2 = j\, d^3x'$

wobei $$\vec{B}_2(\vec{x}) \overset{\downarrow}{=} \frac{I_2}{c} \int dl_2 \times \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} dl_1 \times \left(dl_2 \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \right)$$

Mit der Formel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ folgt:

$$d\vec{l}_1 \times \left(d\vec{l}_2 \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \right) = d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1 \cdot \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \right) - d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} =$$

$$= -d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1 \nabla_{\vec{x}'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right) - dl_1 dl_2 \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \left\{ -d\vec{l}_2 \left[d\vec{l}_1 \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \right] - d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right\}$$

wobei $$\int_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) = \oint \sum_i dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \,.$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \Big|_A^A = 0$$

Es bleibt nur das 2. Doppel-Kurven-Integral:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\Gamma_1} \left(d\vec{l}_1 \cdot \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \right) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}} \quad (3.7)$$

3.3. Das Vektorpotential, $\vec{A}$

Nach Biot-Savart folgt:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \times \underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}_{-\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} = -\frac{1}{c} \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) =$$

$$= \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \vec{\nabla} \times \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{:= \vec{A}(\vec{x})} =$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

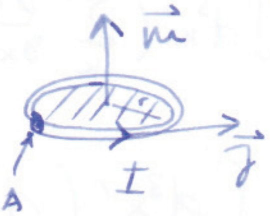
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (3.8)$$

wobei
$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \quad (3.9)$$

das magnetische Potential ist, analog dem elektrischen Potential.

In der Elektrostatik hatten wir $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho$.
Wie sieht $\vec{\nabla}.\vec{B}$ aus?

mal Fläche definiert:



$$m = IA = I\pi r^2 = ja\pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{2} j \underbrace{a\, 2\pi r}_{\text{Volumen des Ringes}} \cdot r = \frac{1}{2} V j r$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} V \vec{r} \times \vec{j}$$

Daher ist es sinnvoll das integrale Dipolmoment wie folgt zu definieren:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_\Omega d^3x' \left(\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \right)} \quad (3.23)$$

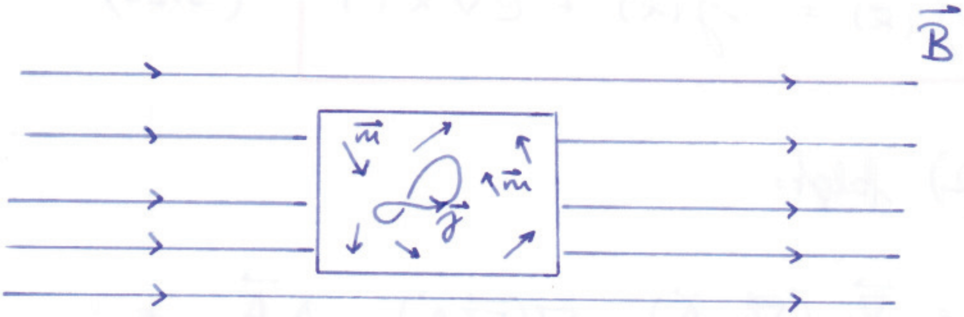
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3}} \quad (3.24)$$

vgl. mit Formel (1.37) → Das magnetische Potential hat in erster Ordnung einen Dipolcharakter.

3.7. Magnetisierung

Wir definieren analog zur Polarisation, eine Magnetisation:

$$\vec{M}(\vec{x}) = \int_\Omega \frac{\vec{m}(\vec{x}')\, d^3x'}{|\Omega|}$$



Analog zur Elektrostatik werden wir das magnetische Potential schreiben als:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int_{\Omega} \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{c\vec{M}\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)\right) d^3x'$$

Der zweite Term lässt sich noch umschreiben in:

$$c\int d^3x'\, \vec{M}\times\frac{x-x'}{|x-x'|^3} = c\int d^3x'\, \vec{M}\times\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \overset{\substack{\text{Produkt}\\ \downarrow}}{\underset{\text{regel}}{=}}$$

$$= -c\int_{\Omega} d^3x'\left(\nabla_{\vec{x}'}\times\frac{\vec{M}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\times\vec{M}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Stokes}}}{=} -c\int_{\partial\Omega}\underbrace{\frac{\vec{M}\cdot\vec{n}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}_{\xrightarrow{|\Omega|\to\infty}0} dA +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{c\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\times\vec{M}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

Wir können nun $\vec{j}_M := c\vec{\nabla}\times\vec{M}$ den Magnetisierungsstrom definieren.

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{c}\int_{\Omega} d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{c}\int_{\Omega} d^3x'\frac{\vec{j}_M(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{\Omega} \frac{\vec{j}+\vec{j}_M}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x' := \frac{1}{c}\int_{\Omega}\frac{\tilde{\vec{j}}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

wobei $\boxed{\vec{\tilde{j}}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) + c\vec{\nabla}\times\vec{M}}$ (3.25)

Aus (3.12) folgt:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \nabla(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{\text{Coulomb-Eichung}}) - \Delta\vec{A} =$$

$$= -\Delta_{\vec{x}}\frac{1}{c}\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\left(c\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\times\vec{M} + \vec{j}(\vec{x}')\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\int \underbrace{\left(\Delta_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')}\left(c\vec{\nabla}\times\vec{M} + \vec{j}\right) =$$

$$= +\frac{4\pi}{c}\int \delta(\vec{x}-\vec{x}')\,\underbrace{\left(c\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\times\vec{M} + \vec{j}(\vec{x}')\right)}_{\vec{\tilde{j}}(\vec{x}')} =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{\tilde{j}}(\vec{x})$$

□.

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}+\vec{j}_M) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_M = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{4\pi}{\cancel{c}}\cancel{c}\,\vec{\nabla}\times M = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\underbrace{\vec{B} - 4\pi\vec{M}}_{:=\vec{H}}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

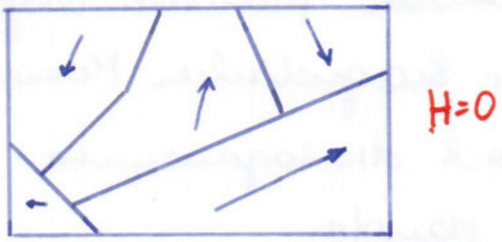
magnetische Feldstärke

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_{\vec{x}}\times\vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x})} \quad (3.26)$$

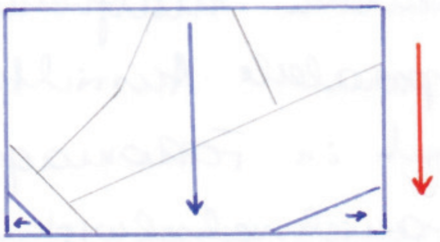
das gleichmäßige verschieben der Bloch-Wände. Nach das ungleichmäßige Wand verschieben entsteht das Verhalten, das sich Hysteresis nennt und dessen Kurve in der letzten Grafik zu sehen ist.

Die Details dazu:

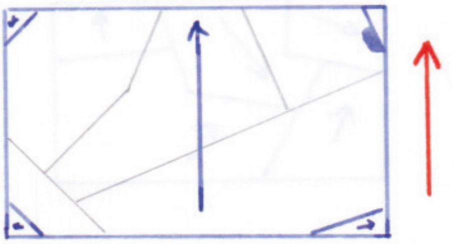
A



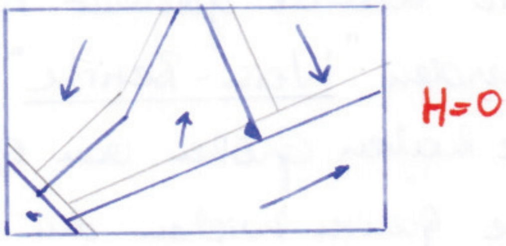
E



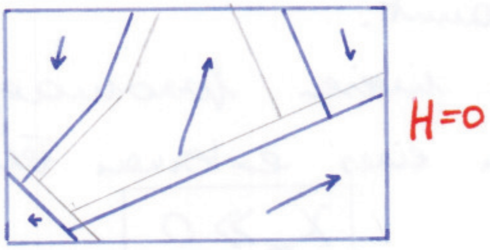
B



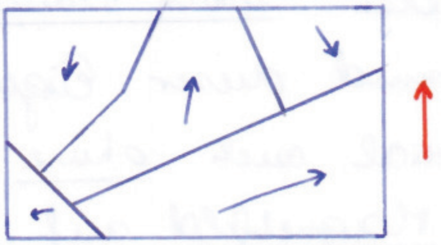
F



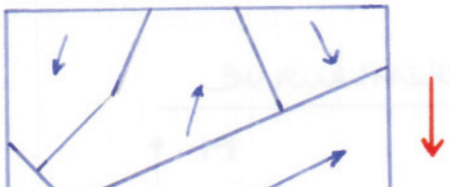
C



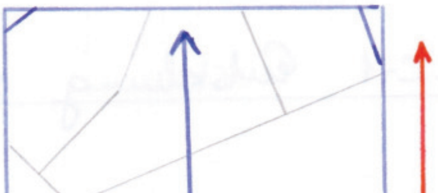
G



D



H



3.8. Lösung der stationären Maxwellgleichung mit Hilfe der Potentiale

Die Maxwellglg.:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \quad (1.39) & \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \quad (1.13) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (3.11) & \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (3.26) \end{array}}$$

(3.29)

Wir wollen nun die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ mithilfe des Potentials $\vec{A}$ berechnen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{mit} \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \;\Rightarrow\; \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$$

$$\text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\mu}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\mu}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \frac{1}{\mu}\left[\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{0 \text{ in der Magnetostatik}}) - \left(\Delta\vec{A}\right)\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left(\vec{\nabla}\frac{1}{\mu}\right)\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \frac{1}{\mu}\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

wegen $\mu = \mu(H)$, das i.a. stark nicht linear ist, kann man hier nur schwer weiterrechnen.

<u>Falls μ = konst</u> folgt:

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

Das ist eine Poissongleichung für $\vec{A}$ ähnlich der für ϕ aus der Elektrostatik.

Falls $\vec{j} = \vec{0}$ folgt $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$, was formell wie in der Elektrostatik aussieht (vgl. (1.13)).

Man kann hier formell ein magnetostatisches Potential ϕ_M einführen (analog Elektrostatik) mit

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_M$$

aus (3.11) $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad$ folgt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}(\mu\vec{H}) = \underbrace{(\vec{\nabla}\mu)}_{0 \text{ für } \mu = \text{konst.}}\vec{H} + \mu\vec{\nabla}\cdot\vec{H} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{H} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\Delta\phi_M = 0$$

D.h. eine Laplace-Gleichung für ϕ_M.

Für den Fall, dass $\vec{M}$ = konst, wie das der Fall bei <u>harten Ferromagneten</u> ist, folgt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{H} + 4\pi\vec{M}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{H} + 4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{M} =$$

$$= \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\phi_M) + 4\vec{\pi}\vec{M} = -\Delta\phi_M + 4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{M} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\phi_M = 4\pi\vec{\nabla}\vec{M}$$

mit Einführung einer magnetischen Ladungsdichte

$$\rho_M := -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$$

folgt:

$$\Delta\phi_M = -4\pi\rho_M$$

Hier kennen wir die Lösung schon:

$$\phi_M(\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\rho_M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_M(\vec{x}) \underset{\overset{\uparrow}{\rho_M = -\vec\nabla \vec M}}{=} -\int d^3x' \, \frac{\vec\nabla_{\vec x'} M(\vec x')}{|\vec x - \vec x'|} = -\int d^3x' \left[\underbrace{\vec\nabla_{\vec x'} \left(\frac{\vec M}{|\vec x - \vec x'|} \right)}_{0} - M \vec\nabla_{\vec x'} \left(\frac{1}{|\vec x - \vec x'|} \right) \right] =$$

$$= \int d^3x' \, \vec M \, \vec\nabla_{\vec x'} \left(\frac{1}{|\vec x - \vec x'|} \right) = - \int d^3x' \, \vec M \, \vec\nabla_{\vec x} \left(\frac{1}{|\vec x - \vec x'|} \right) =$$

$$= - \vec\nabla_{\vec x} \int d^3x \, \frac{\vec M(\vec x')}{|\vec x - \vec x'|}$$

d.h. $$\Phi_M(\vec x) \underset{\overset{\uparrow}{\text{Entw. von } \frac{1}{|\vec x - \vec x'|}}}{=} - \vec\nabla_{\vec x} \int d^3x' \, \vec M \left(\frac{1}{x} + \frac{\vec x \cdot \vec x'}{x^3} + \mathcal{O}(x^3) \right) =$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_M(\vec x) \simeq - \vec\nabla_{\vec x} \int d^3x' \, \frac{\vec M(\vec x')}{x} = - \underbrace{\int d^3x' M(\vec x')}_{:= \vec m} \cdot \vec\nabla \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$= - \vec m \cdot \underbrace{\vec\nabla \left(\frac{1}{x} \right)}_{-\frac{\vec x}{x^3}} = + \frac{\vec m \cdot \vec x}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_M(\vec x) \approx \frac{\vec m \cdot \vec x}{x^3}} \quad (3.30)$$

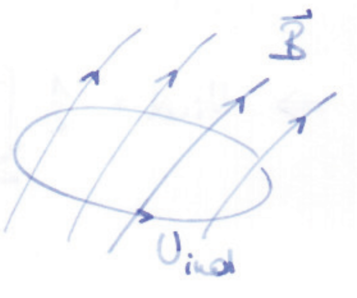
man sieht im Vergleich mit (1.37), dass Φ_M bzw. $\vec H$ einen Dipolcharakter hat (nachdem $\vec H = -\vec\nabla \Phi_M$).

4. Elektrodynamik - Felder varibler Quellen

4.1. Elektromagnetische Induktion

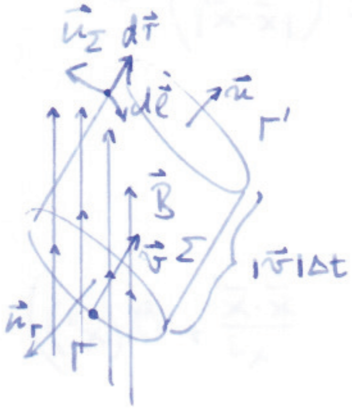
Es existiert das Phänomen, dass eine Spannung entsteht, wenn sich ein Kreis in einem Magnetfeld mit variablen Fluss befindet:

$$\boxed{U_{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d \Phi_B}{dt}} \quad (4.1)$$

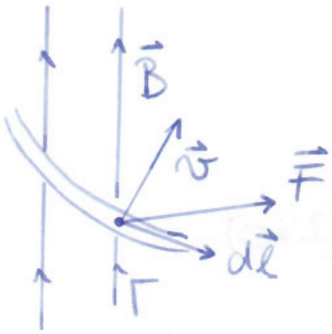


Wie kann man dies theoretisch nachvollziehen?

Es sei folgendes Gedankenexperiment:



Die Metallschleife Γ soll sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x})$ im Feld $\vec{B}(\vec{x})$ bewegen.
Daher wirkt eine Lorentzkraft $\vec{F} = \frac{1}{c} q\, \vec{v} \times \vec{B}$ auf die Elektronen in der Schleife Γ und die Elektronen bewegen sich entlang der Schleife. So entsteht ein (induzierter) Strom. $\vec{F}$ darf man dann als Kraft eines "induzierten" elektrischen Feldes ansehen:



$$\vec{F} = q\,\vec{E}_{ind}$$

von der Seite 2|2 wissen wir

$$\Phi(2) - \Phi(1) = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad U_{ind} = \oint_\Gamma \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma \frac{\vec{F}}{q}\, d\vec{l} = \oint_\Gamma \frac{1}{c}\,\frac{\cancel{q}\,\vec{v}\times\vec{B}}{\cancel{q}}\, d\vec{l} =$$

$$= \frac{1}{c}\oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_\Gamma (\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_\Gamma \vec{B}\,(\vec{v}\times d\vec{l}) =$$

$$= -\frac{1}{c}\oint_\Gamma \vec{B}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times d\vec{l}\right) \qquad \text{wobei} \quad d\vec{r}\times d\vec{l} = -\vec{n}_\Sigma\, dA$$

$$\Rightarrow \quad U_{ind} = \frac{1}{c}\int_\Sigma \frac{\vec{B}}{dt}\cdot\vec{n}_\Sigma\, dA$$

wegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{B}\cdot\vec{n}\, dA = \int_{F_t \cup F_{t+dt} \cup \Sigma} \vec{B}\cdot\vec{n}\cdot dA \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \int_{F_t} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Gamma}\, dA + \int_{F_{t+dt}} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Gamma'}\, dA + \int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Sigma}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Sigma}\, dA = -\int_{F_t} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Gamma}\, dA - \int_{F_{t+dt}} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Gamma'} = -\int_{F_{t+dt}} \vec{B}\vec{n}_{\Gamma}\, dA + \int_{F_t} \vec{B}\cdot\vec{n}_{\Gamma'} dA$$

$$= -\left(\text{Fluß}_{F_{t+dt}} \vec{B} - \text{Fluß}_{F_t} \vec{B}\right) = -\left(\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t)\right)$$

$$\Rightarrow U_{ind} = -\frac{1}{c}\,\frac{1}{dt}\left(\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t)\right) = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Rightarrow U_{ind} = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_B}{dt}$$

□.

Aus der Formel (4.1), die als Faradaysches Induktionsgesetz bekannt ist, kann man eine neue Maxwell-Gleichung gewinnen.

$$\oint_{\Gamma=\partial F} \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\int_{F} \vec{B}\cdot\vec{n}\, dA$$

$$\Big\downarrow \text{Stokes}$$

$$\int_{F} (\vec{\nabla}\times\vec{E}_{ind})\,\vec{n}\, dA = -\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\int_{F} \vec{B}\cdot\vec{n}\, dA$$

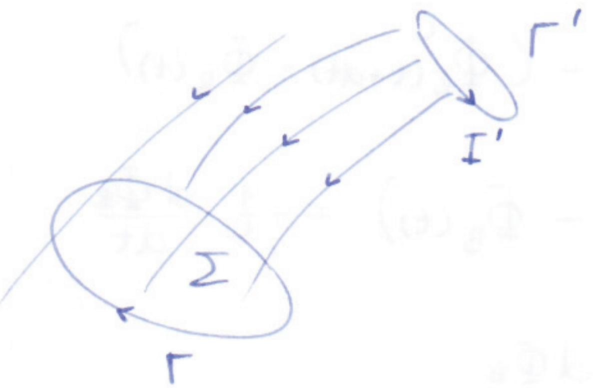
$$\int_{F} (\vec{\nabla}\times\vec{E}_{ind})\,\vec{n}\, dA = -\frac{1}{c}\int_{F} \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{n}\, dA \quad \forall F$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \quad (4{,}2)$$

4.1.1. Induktive Kopplung zwischen Schleifen

Wir wir bereits gesehen haben, entsteht eine induzierte Spannung, wenn ein Kreis (Schleife, Spule, etc.) sich in einem variablen Magnetfeld befindet.

Φ_B aus Formel (4.1) kann von einem anderen Kreis, Γ' verursacht werden falls I' variabel ist.



Der Fluß von $\vec{B}$ durch Σ, hängt allgemein vom Strom I' linear ab:

$$\boxed{\frac{1}{c}\Phi_B^{\Sigma} = L_{\Gamma\Gamma'}\, I'} \qquad (4.3)$$

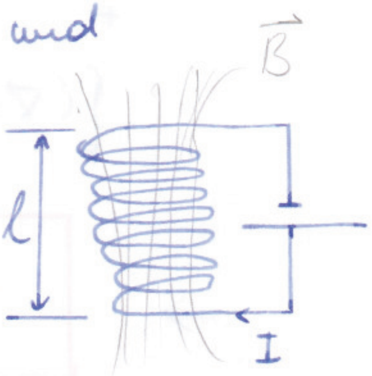
Falls auch Γ vom Strom durchflossen wird:

$$\Phi_B^{\Sigma} = L_{\Gamma\Gamma} I + L_{\Gamma\Gamma'} I'$$

Die Größe L heißt Induktanz und wird in Henry (H) gemessen.

In einer Spule hängen die Kreise zusammen und es gibt nur einen Strom I und

$$\Phi_B = B\cdot A_{ges} = B\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Anzahl d. Windungen}}}{N}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Querschnittsfläche}}}{A} = \mu HNA$$



$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{c}\,\mathbb{L}\cdot\dot{\mathbb{I}} = \mathbb{R}\cdot\mathbb{I} - \mathbb{U}^{a}$$

Dies ist eine lineare <u>Matrix-differential Gleichung</u>

4.2. Maxwell-Gleichung für variable Felder

Eine derartige Maxwell-Gleichung haben wir bereits (siehe (4.2)). Eine weitere wollen wir hier erhalten.

Für variable Felder gilt $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ und wegen der Kontinuitätsgleichung folgt, das auch $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \neq 0$ ist.

Die Ladungsdichte (siehe (1.39)) hat die Form:

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{?}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

Gleichung (3.26), die Maxwell-Gleichung im stat. Fall führt zu:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Big|\ \vec{\nabla}(\ldots)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\vec{j}$$

$$\underbrace{\vec\nabla(\vec\nabla\times\vec H)}_{0} = \frac{4\pi}{c}\vec\nabla\underbrace{\vec j}_{\neq 0}$$

Was ist hier falsch?

Man könnte das folgende machen:

$$\vec\nabla(\vec\nabla\times\vec H) = \frac{4\pi}{c}\vec\nabla\underbrace{\left(\vec j + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right)}_{0}$$

Das würde aber bedeuten, dass $\vec\nabla\times\vec H$ eine andere Form haben muss!

$$\Rightarrow \quad \vec\nabla\times\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t}$$

<u>Beweis:</u>

$$\vec\nabla(\vec\nabla\times\vec H) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec\nabla\vec j + \frac{1}{4\pi}\vec\nabla\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec\nabla\vec j + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

$$= \frac{4\pi}{c}\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)}_{0} = 0 \qquad \Box.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec\nabla\times\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t}} \quad (4.6)$$

D.h. die <u>Maxwell-Gleichungen für variable Felder</u> lauten:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec\nabla\cdot\vec D = 4\pi\rho & \vec\nabla\times\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t} \\ \vec\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} & \vec\nabla\cdot\vec B = 0 \end{array}} \quad (4.7)$$

Im Vergleich zu (3.25)

4.3. Eichung /und Konstruktion der phys. Feldern aus den Hilfsfeldern

Wie wir schon in im Abschnitt 3.4. gesehen haben, lassen ~~sich~~ Transformation der Hilfsfelder $\vec{A},\phi$ die Physik, d.h. die Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ invariant.

Schauen wir uns nochmal die Maxwell-Gleichungen an (4.7). Sie liefern 8 skalare Gleichungen für 6 Variablen $(\vec{E},\vec{B})$. d.h. die Gleichungen sind überbestimmt. Für die Hilfsfelder $(\phi,\vec{A})$ sind es nur 4 Variablen!

Wie lassen sich die Hilfsfelder im Falle der variablen Felder konstruieren?

Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

Aus $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{A}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\Big(\underbrace{\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}_{-\vec{\nabla}\phi}\Big) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \quad (4.8)$$

(vgl. Seite 21_2)

Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$ folgt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isotrop}}}{=} \varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon\vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + \int_V \vec{g}\, d^3r\right) = 0} \qquad (4.28)$$

Wir haben also zwei Erhaltungssätze für Systeme mit elektromagnetischen Feld bekommen: Energie- und Impulserhaltung.

Nach Noether entspricht einer erhaltenen Größe eine Symmetriegruppe. Es ist daher sinnvoll die Transformation der Felder und Quellen unter Transformationsgruppen (z.B. geom. Trafo. oder Eich-Transf.). Siehe dazu Anhang A.

5. Elektromagnetische Wellen

5.1. Ebene Wellen in nichtleitenden Medien

Die Existenz der elektromagnetischen Wellen ist eine direkte Folge der Maxwell-Gleichungen, und wurde 1865 von Maxwell theoretisch vorhergesagt und von Hertz 1888 technisch realisiert.

Für ein homogenes Medium mit μ und ε konstant, ohne Quellen, d.h. $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ folgt für die Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \;, \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \;, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir wenden $\vec{\nabla}\times$ auf die 3. Gleichung an:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{0}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\Delta \vec{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left(\Delta - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \vec{0}$$

mit $c' = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium (Details siehe A.19) folgt

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \vec{0}} \qquad (5.1)$$

Dies stellt eine Wellengleichung für $\vec{E}$ dar. Analog folgt auch eine für $\vec{H}$ oder $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = \vec{0}} \qquad (5.2)$$

D.h. zur Lösung von Gleichung (5.1-2) müssen 6 skalare Gleichungen von der Art

$$\left(\Delta - \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{x},t) = 0$$

gelöst werden.

Eine bekannte mögliche Lösung ist $f(\vec{x},t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

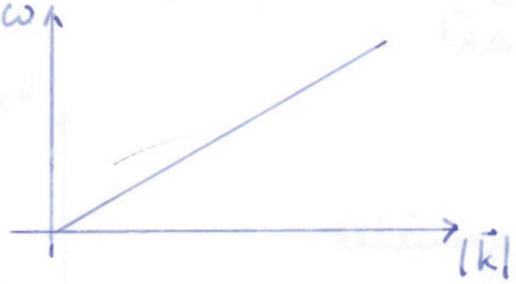
$$\Rightarrow \Box f = 0 \Rightarrow -\vec{k}^2 - \frac{1}{c'^2}(-\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c'^2} \qquad \Rightarrow$$

Die Abhängigkeit von ω von $|\vec{k}|$ nennt man im allgemeinen „<u>Dispersionsrelation</u>"

$$\boxed{\omega = c' |\vec{k}|} \qquad (5.3)$$

Dies ist die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen im homogenen linearen Medium.



5.1.1. Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Falls sich die Welle entlang von x-Achse ausbreitet folgt: $\vec{k} = (k,0,0)$ und $\vec{k}\cdot\vec{x} = kx$

und aus $\omega^2 = c'^2 |\vec{k}|$ folgt $\omega = \pm c' |\vec{k}| = \pm c' k$

Die allgemeine Lösung von (5.1-2) lautet in diesem Fall

$$f(\vec{x},t) = A\, e^{i(kx-\omega t)} + B\, e^{-i(kx+\omega t)}$$

wobei $kx-\omega t$ <u>Phase</u> genannt wird.
Wie groß ist die Geschwindigkeit der Phase?

$$k x_0 - \omega t_0 = k x_1 - \omega t_1$$

$$\Rightarrow k(x_0 - x_1) = \omega(t_0 - t_1)$$

$\Longrightarrow$

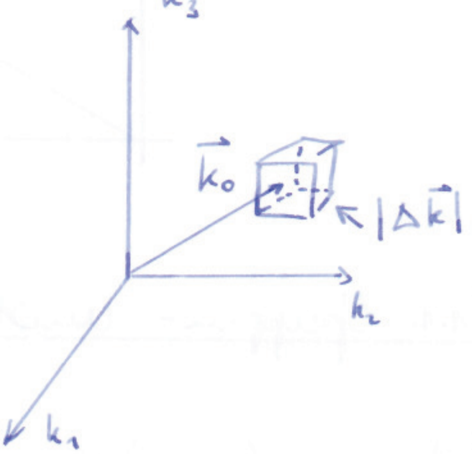
$$\Rightarrow \quad \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\omega}{k} = C'$$

D.h.
$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega}{k}} \qquad (5.4)$$

Wir nehmen nun eine Wellengruppe:

$$f(\vec{x},t) = \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}\, d\vec{k}$$

mit $|\Delta\vec{k}|$ um $\vec{k}_0$ gewählt



$$\Rightarrow f(\vec{r},t) = \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(k)t)} = \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \underbrace{\omega(k)}_{\text{Taylor um } \vec{k}_0} t)} .$$

$$= \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t + \frac{\partial\omega}{\partial k}\big|_{k_0}(\vec{k}-\vec{k}_0)t)}\, d\vec{k} \qquad \frac{\vec{k}-\vec{k}_0 = \vec{k}'}{d\vec{k} = d\vec{k}'}$$

$$= \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k}'+\vec{k}_0)\, e^{i\left[(\vec{k}_0 + k')\vec{x} - \omega(k_0)t - \frac{\partial\omega}{\partial k}\big|_{k_0} k' t\right]}\, dk'$$

$$= e^{i\vec{k}_0 \vec{x}} \int_{|\Delta\vec{k}|} a(\vec{k}'+\vec{k}_0)\, e^{ik'(\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{k_0} t)} =$$

$$= e^{i\vec{k}_0 x}\, g\left(\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{k_0} t\right) \Longrightarrow$$

Die "Energie der Gruppe" ist:

$$|f(\vec{x},t)|^2 = \left|g\left(\vec{x} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\Big|_{\vec{k}_0} t\right)\right|^2$$

Daraus folgt dass die Gruppe sich mit der Geschwindigkeit

$$\boxed{\vec{v}_g = \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}}} \qquad (5.5)$$

bewegt.

D.h. für unser Beispiel folgendes

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} c'k = c'$$

⇒ Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind für elektromagnetische Wellen gleich groß.

Die bisherige Funktion $f(\vec{x},t)$ hat nur eine Komponente von $\vec{E}$ oder $\vec{H}$ wiedergespiegelt. Für alle Komponenten folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x},t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \\ \text{bzw.}\quad \vec{B}(\vec{x},t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \end{aligned}} \qquad (5.6)$$

wobei $\vec{E}_0$ und komplexe Amplituden sind

Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt

$$\vec{E}_0 \, i\vec{k} \, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

und ähnlich $\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\perp\vec{E}$ und $\vec{k}\perp\vec{B}$

Aus $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$ folgt

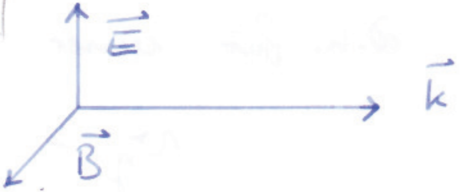
$$\nabla \times e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\vec{E}_0 = -\frac{1}{c}\vec{B}_0\frac{\partial}{\partial t}e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$$

$$i\vec{k} \times \underbrace{e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\vec{E}_0}_{\vec{E}} - \frac{1}{c}(-i\omega)\underbrace{\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}}_{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \cancel{i}\vec{k}\times\vec{E} = \cancel{i}\frac{\omega}{c}\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}} \qquad (5.7)$$

$\Rightarrow \vec{B}\perp\vec{E}$



D.h. $(\vec{E},\vec{B})$ bilden ein transversales elektromagn. Feld.

Die Lösung der Gleichung (5.1-2) lässt sich allgemein schreiben als

$$\vec{E}_{(\vec{x},t)} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{(\vec{x})}e^{-i\omega t} + \vec{E}^*_{(\vec{x})}e^{i\omega t}\right)$$

dasselbe gilt für $\vec{B}$ oder $\vec{H}$ (Details siehe A.20)

Wir wollen nun zeigen, das der zeitliche Mittelwert des Poynting'schen Vektors (und damit die Energiedichte) sich entlang der Richtung $\vec{k}$ bewegt.

$$\overline{\vec{S}} \overset{(4.21)}{=} \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\,(\vec{E}\times\vec{H}) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{1}{2T}\frac{1}{4}\int_{-T}^{T}dt\left[(\vec{E}e^{-i\omega t}+\vec{E}^*e^{i\omega t})\times(\vec{H}e^{-i\omega t}+\vec{H}^*e^{i\omega t})\right]$$

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{1}{4}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\Big(\vec{E}\times\vec{H}e^{-2i\omega t} + \vec{E}\times\vec{H}^* + \vec{E}^*\times\vec{H} +$$

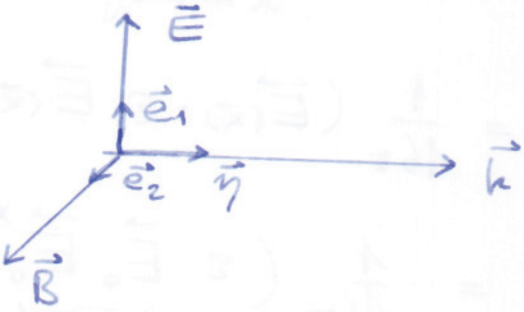
$$+ \vec{E}^*\times\vec{H}^* e^{2i\omega t}\Big) = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{4}\Big\{(\vec{E}\times\vec{H}^* + \vec{E}^*\times\vec{H})\underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt}_{1}$$

$$+ \frac{1}{2T}\underbrace{\int_{-T}^{T} dt\,(\vec{E}\times\vec{H}e^{-2i\omega t} + \vec{E}^*\times\vec{H}^* e^{2i\omega t})}_{0 \text{ für } T = \frac{2\pi}{\omega}}\Big\} =$$

$$= \frac{c}{16\pi}\underbrace{(\vec{E}\times\vec{H}^* + \vec{E}^*\times\vec{H})}_{2\,\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*) =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{x}}\times\vec{H}_0^* e^{-i\vec{k}\vec{x}}) = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*)$$

Was ist $\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*$



$$\vec{E}_0\times\vec{H}_0^* = \vec{e}_1 e_0\times\vec{e}_2 h_0^* =$$

$$= e_0 h_0^* \underbrace{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}_{\vec{\eta}} = e_0 h_0^* \vec{\eta}$$

wobei $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{\eta}$

und $\vec{E} = \vec{e}_1 E_0$

$\vec{B} = \vec{e}_2 B_0$

(wobei $\vec{E} = \underbrace{\vec{e}_1\, e_0}_{\vec{E}_0}\underbrace{e_0 e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\omega t}}_{E_0}$)

$$\Rightarrow \overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(e_0 h_0^*\vec{\eta}) = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(e_0 h_0^*)\vec{\eta}$$

aus $\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{E}\times\vec{k}$ folgt $b_0 = \frac{c}{\omega}e_0|\vec{k}|$

$$\Rightarrow \mu h_0 = \frac{c}{\omega}e_0|\vec{k}| \Longrightarrow \mu h_0^* = \frac{c}{\omega}e_0^*|\vec{k}|$$

$$\Rightarrow \overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\Big(e_0\frac{c}{\omega\mu}e_0^*|\vec{k}|\Big)\vec{\eta} \overset{\uparrow}{\underset{c|\vec{k}| = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{=}} \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\Big(|e_0|^2\frac{\cancel{\omega}\sqrt{\varepsilon\mu}}{\cancel{\omega}\mu}\Big)\vec{\eta} =$$

$$= \frac{c}{8\pi}|e_0|^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{\eta}$$

$\square$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|e_0|^2\,\vec{\eta}} \qquad (5.8)$$

Wir wollen uns noch im Detail den Vorfaktor von $\vec{\eta}$ anschauen:

zunächst $$w(\vec{r},t) \overset{(4.20)}{=} \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) =$$

$$\Rightarrow \overline{w(\vec{x},t)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in Analogie zu } \vec{S}}}{=} \frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{4}\left(2\vec{E}_{(\vec{x})}\vec{D}^{*}_{(\vec{x})} + 2\vec{H}(\vec{x})\cdot\vec{B}(\vec{x})^{*}\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\vec{E}(\vec{x})\cdot\varepsilon\,\vec{E}(\vec{x})^{*} + \mu\,H(\vec{r})\,H(\vec{x})^{*}\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,\underbrace{\vec{E}_0\,\vec{E}_0^{*}}_{|\vec{E}_0|^2 = |e_0|^2}\,\underbrace{e^{ikx}\,e^{-ikx}}_{1} + \mu\,\underbrace{\vec{H}_0\,\vec{H}_0^{*}}_{|\vec{H}_0|^2 = |h_0|^2}\,\underbrace{e^{ikx}\,e^{-ikx}}_{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,|e_0|^2 + \mu\,\underbrace{|h_0|^2}_{\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}|e_0|^2|k|^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,|e_0|^2 + \frac{\mu\,c^2|k|^2}{\omega^2\mu^2}|e_0|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left(\varepsilon\,|e_0|^2 + \frac{\cancel{\omega^2}\,\varepsilon\,\cancel{\mu^2}}{\cancel{\omega^2}\,\cancel{\mu^2}}|e_0|^2\right) = \frac{1}{16\pi}\,2\varepsilon|e_0|^2 =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon\,|e_0|^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{w(\vec{x},t)} = \frac{1}{8\pi}\,\varepsilon\,|e_0|^2} \qquad (5.9)$$

$$\Rightarrow \overline{\vec{S}} = c\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\frac{\varepsilon}{8\pi}|e_0|^2}_{\overline{w}}\vec{\eta} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\overline{w}\,\vec{\eta}$$

$$\boxed{\overline{\vec{S}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\overline{w}\,\vec{\eta}} \qquad (5.10)$$

D.h. aus Formel (5.10) kann man sehen, das sich der Umoff-Poynting-Vektor in Richtung $\vec{\eta}$, d.h. $\vec{k}$ ausbreitet und eine Energiedichte mit der Geschwindigkeit c' transportiert.

5.1.2 Polarisation

Wir haben gesehen, das Gleichung ( ) zur Lösung folgende Funktion hat

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

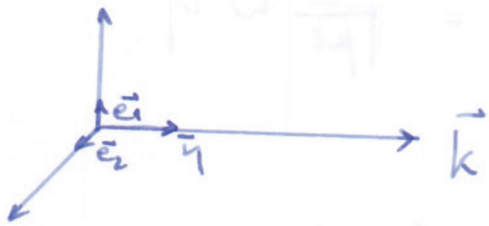
wobei zu betonen ist, dass das <u>physikalische Feld</u>

$$Re(\vec{E}) = Re(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})})$$

wobei $\vec{E}_0$ i.A. eine <u>komplexe Amplitude</u> ist. Nachdem wir transversale Wellen betrachten findet die Bewegung nur in der $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$-Ebene statt.

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} E_x(x,t) \\ E_y(x,t) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

für Ausbreitung in z-Richtung



$\vec{E}_0$ ist ein konstanter Vektor in $\mathbb{C}^2$

Allgemein hat $\vec{E}_0$ die Form:

$$\vec{E}_0 = \vec{\alpha}_1 + i\,\vec{\alpha}_2 \qquad \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2 \in \mathbb{R}$$

für

$$\vec{E}_{(\vec{x},t)}^{ph} = Re\left(\vec{E}_{(x,t)}\right) = Re\left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right)$$

$$= Re\left[\left(\vec{E}_0^{r} + i\vec{E}_0^{c}\right)\left(\cos(\vec{k}\vec{x}-\omega t) + i\sin(\vec{k}\vec{x}-\omega t)\right]\right.$$

$$= \vec{E}_0^{r}\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\vec{x}-\omega t)$$

D.h.

$$\boxed{\vec{E}_{(\vec{x},t)}^{phys.} = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \qquad (5.11)$$

D.h. der Vektor $\vec{E}_0$ ist jetzt reel und nachdem wir gesagt haben, das die Welle transversal ist folgt:

$$\vec{E}_0 = E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2$$

5.2. Felder bei gegeben Quellen (Ladungs- und Stromverteilung

Wir arbeiten im folgenden in der Lorentzeichung in der die Gleichung (4.11) für die Potentialfelder gilt:

$$\begin{cases} \Box \phi = -4\pi\rho \\ \Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases}$$

wir definieren nun hier einige 4-Vektoren (Details dazu im Kapitel 6):

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \qquad j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \qquad \Longrightarrow$$

Die Gleichung (4.11) hat dann folgende kompakte Form:

$$\boxed{\Box A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu} \qquad (5.12)$$

Wir können diese Gleichung wieder mittels Greens-Methode lösen:

$$\Box_{\vec{x},t}\, G(\vec{x},t,\vec{x}',t') = -\frac{4\pi}{c}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$

mit der formalen Lösung

$$\boxed{A^\mu = G * j^\mu} \qquad (5.13)$$