

Chemisches Potential für Fermionen auf dem Gitter

Leonard Fister, Gabriele Jaritz, Florian Wodlei

Karl-Franzens-Universität Graz, FB Theoretische Physik

30. März, 2007

Dirac-Operator D im Kontinuum und am Gitter

Dirac-Operator D^{cont} im Kontinuum:

$$D^{cont}(\mu) = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \gamma_4\mu$$

Raumzeit \rightarrow Gitter

- periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen
- $A_\nu = 0$: freie Fermionen
- Ableitungen: $\partial_\nu \rightarrow \sum_{\hat{\nu}} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_\nu}$
- Zunächst: $\mu = 0$

Dirac-Operator D im Kontinuum und am Gitter

Dirac-Operator D^{cont} im Kontinuum:

$$D^{cont}(\mu) = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \gamma_4\mu$$

Raumzeit \rightarrow Gitter

- periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen
- $A_\nu = 0$: freie Fermionen
- Ableitungen: $\partial_\nu \rightarrow \sum_{\hat{\nu}} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_\nu}$
- Zunächst: $\mu = 0$

Dirac-Operator D im Kontinuum und am Gitter

Dirac-Operator D^{cont} im Kontinuum:

$$D^{cont}(\mu) = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \gamma_4\mu$$

Raumzeit \rightarrow Gitter

- periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen
- $A_\nu = 0$: freie Fermionen
- Ableitungen: $\partial_\nu \rightarrow \sum_{\hat{\nu}} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_\nu}$
- Zunächst: $\mu = 0$

Dirac-Operator D im Kontinuum und am Gitter

Dirac-Operator D^{cont} im Kontinuum:

$$D^{cont}(\mu) = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \gamma_4\mu$$

Raumzeit \rightarrow Gitter

- periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen
- $A_\nu = 0$: freie Fermionen
- Ableitungen: $\partial_\nu \rightarrow \sum_{\hat{\nu}} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_\nu}$
- Zunächst: $\mu = 0$

Dirac-Operator D im Kontinuum und am Gitter

Dirac-Operator D^{cont} im Kontinuum:

$$D^{cont}(\mu) = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \gamma_4\mu$$

Raumzeit \rightarrow Gitter

- periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen
- $A_\nu = 0$: freie Fermionen
- Ableitungen: $\partial_\nu \rightarrow \sum_{\hat{\nu}} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_\nu}$
- Zunächst: $\mu = 0$

Einfachster Ansatz für den Dirac-Operator D^N am Gitter

Dirac-Operator für naive Fermionen

$$D^N(\mu = 0) = \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \frac{\delta_{x+\hat{\nu},y} - \delta_{x-\hat{\nu},y}}{2a_{\nu}}$$

wobei $a = a_1 = a_2 = a_3, a_t = a_4$

Fourier-Transformation in den Impulsraum

$$\tilde{D}^N(\mu = 0) = \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \frac{i \sin(p_{\nu} a_{\nu})}{a_{\nu}}$$

Doppler-Terme

$\tilde{D}^N(\mu = 0)$ hat Nullstellen bei

$$p = (0, 0, 0, 0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{a}, 0, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

$$= \left(0, \frac{\pi}{a}, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

\vdots

$$= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a_t}\right)$$

Doppler-Term

Insgesamt ergeben sich **15** Dopplerterme!

Doppler-Terme

$\tilde{D}^N(\mu = 0)$ hat Nullstellen bei

$$p = (0, 0, 0, 0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{a}, 0, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

$$= \left(0, \frac{\pi}{a}, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

\vdots

$$= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a_t}\right)$$

Doppler-Term

Insgesamt ergeben sich **15** Dopplerterme!

Doppler-Terme

$\tilde{D}^N(\mu = 0)$ hat Nullstellen bei

$$p = (0, 0, 0, 0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{a}, 0, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

$$= \left(0, \frac{\pi}{a}, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

\vdots

$$= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a_t}\right)$$

Doppler-Term

Insgesamt ergeben sich **15** Dopplerterme!

Doppler-Terme

$\tilde{D}^N(\mu = 0)$ hat Nullstellen bei

$$p = (0, 0, 0, 0)$$

$$= \left(\frac{\pi}{a}, 0, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

$$= \left(0, \frac{\pi}{a}, 0, 0\right)$$

Doppler-Term

\vdots

$$= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a_t}\right)$$

Doppler-Term

Insgesamt ergeben sich **15** Dopplerterme!

Wilson-Terme

$$\tilde{D}^W(\mu = 0) = \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \frac{i \sin(p_{\nu} a_{\nu})}{a_{\nu}} + \underbrace{\sum_{\nu} \frac{1 - \cos(p_{\nu} a_{\nu})}{a_{\nu}}}_{\text{entfernt Doppler-Terme}}$$

Chemisches Potential μ einbauen?

Wilson-Terme

$$\tilde{D}^W(\mu = 0) = \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \frac{i \sin(p_{\nu} a_{\nu})}{a_{\nu}} + \underbrace{\sum_{\nu} \frac{1 - \cos(p_{\nu} a_{\nu})}{a_{\nu}}}_{\text{entfernt Doppler-Terme}}$$

Chemisches Potential μ einbauen?

$$\mu \neq 0$$

Naives chemisches Potential:

$$\tilde{D}^W(\mu = 0) = \mu\gamma_4 + \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \frac{i \sin(p_{\nu}a_{\nu})}{a_{\nu}} + \sum_{\nu} \frac{1 - \cos(p_{\nu}a_{\nu})}{a_{\nu}}$$

Energiedichte

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= \frac{\langle H \rangle}{V} = \frac{1}{V} \frac{\text{Tr}(H e^{-\beta(H-\mu N)})}{\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)})} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}) \right) \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}}\end{aligned}$$

Energiedichte

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= \frac{\langle H \rangle}{V} = \frac{1}{V} \frac{\text{Tr}(H e^{-\beta(H-\mu N)})}{\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)})} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}) \right) \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}}\end{aligned}$$

Energiedichte

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= \frac{\langle H \rangle}{V} = \frac{1}{V} \frac{\text{Tr}(H e^{-\beta(H-\mu N)})}{\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)})} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}) \right) \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}} \\ &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \Bigg|_{\mu\beta=\text{const}}\end{aligned}$$

Pfadintegral

Bei der Berechnung der Energiedichte bedient man sich eines Zusammenhangs aus der Pfadintegralmethode:

$$Z = \det(D)$$

Man setzt ferner $\beta = N_t a_t$ und erhält:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \det(D) \\ &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \sum_j \frac{\partial}{\partial a_t} \ln \lambda_j\end{aligned}$$

Pfadintegral

Bei der Berechnung der Energiedichte bedient man sich eines Zusammenhangs aus der Pfadintegralmethode:

$$Z = \det(D)$$

Man setzt ferner $\beta = N_t a_t$ und erhält:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \det(D) \\ &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \sum_j \frac{\partial}{\partial a_t} \ln \lambda_j\end{aligned}$$

Pfadintegral

Bei der Berechnung der Energiedichte bedient man sich eines Zusammenhangs aus der Pfadintegralmethode:

$$Z = \det(D)$$

Man setzt ferner $\beta = N_t a_t$ und erhält:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \det(D) \\ &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \sum_j \frac{\partial}{\partial a_t} \ln \lambda_j\end{aligned}$$

Pfadintegral

Bei der Berechnung der Energiedichte bedient man sich eines Zusammenhangs aus der Pfadintegralmethode:

$$Z = \det(D)$$

Man setzt ferner $\beta = N_t a_t$ und erhält:

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu) &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \det(D) \\ &= -\frac{1}{V} \frac{1}{N_t} \sum_j \frac{\partial}{\partial a_t} \ln \lambda_j\end{aligned}$$

Eigenwerte λ von $\tilde{D}(\mu)$

$\lambda_j = \lambda_j(p) \rightarrow$ Diagonalisieren von $\tilde{D}(\mu)$:

$$\tilde{D} \propto s\mathbb{1} + \gamma_\nu v_\nu = s + \not{v}$$

Charakteristisches Polynom $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det[\lambda - \tilde{D}^W] = \det[(\lambda - s) - \not{v}] \\ &= (\lambda - s)^4 e^{\text{Tr} \ln[\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda-s} \not{v}]} \\ &= (\lambda - s)^4 e^{2\ln\left(1 - \frac{v^2}{(\lambda-s)^2}\right)} \\ \Rightarrow \lambda &= s \pm \sqrt{v^2} \dots \text{doppelt entartet} \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\text{Tr}[\not{v}^{2n+1}] = 0, \text{ da } \gamma_\nu \text{ spurfrei}$$

$$\text{Tr}[\not{v}^{2n}] = 4(v^2)^n$$

Eigenwerte λ von $\tilde{D}(\mu)$

$\lambda_j = \lambda_j(p) \rightarrow$ Diagonalisieren von $\tilde{D}(\mu)$:

$$\tilde{D} \propto s\mathbb{1} + \gamma_\nu v_\nu = s + \not{v}$$

Charakteristisches Polynom $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det[\lambda - \tilde{D}^W] = \det[(\lambda - s) - \not{v}] \\ &= (\lambda - s)^4 e^{\text{Tr} \ln[\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda-s} \not{v}]} \\ &= (\lambda - s)^4 e^{2\ln\left(1 - \frac{v^2}{(\lambda-s)^2}\right)} \\ \Rightarrow \lambda &= s \pm \sqrt{v^2} \dots \text{doppelt entartet} \end{aligned}$$

unter Verwendung von

$$\text{Tr}[\not{v}^{2n+1}] = 0, \text{ da } \gamma_\nu \text{ spurfrei}$$

$$\text{Tr}[\not{v}^{2n}] = 4(v^2)^n$$

Energiedichte

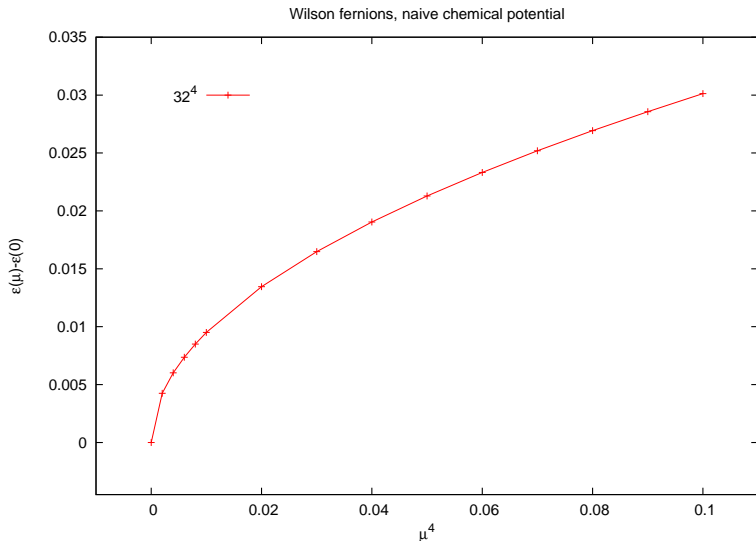
Energie

$$\epsilon(\mu) = -\frac{1}{a^3 N^3 N_t} \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial a_t} \lambda_j \Big|_{a_t \mu = \text{const}}$$

Im Kontinuum erhält man folgende Relation:

$$\epsilon(\mu) - \epsilon(0) = \frac{1}{4\pi^2} \mu^4$$

Naives chemisches Potential



chemisches Potential als imaginäre Impulskomponente

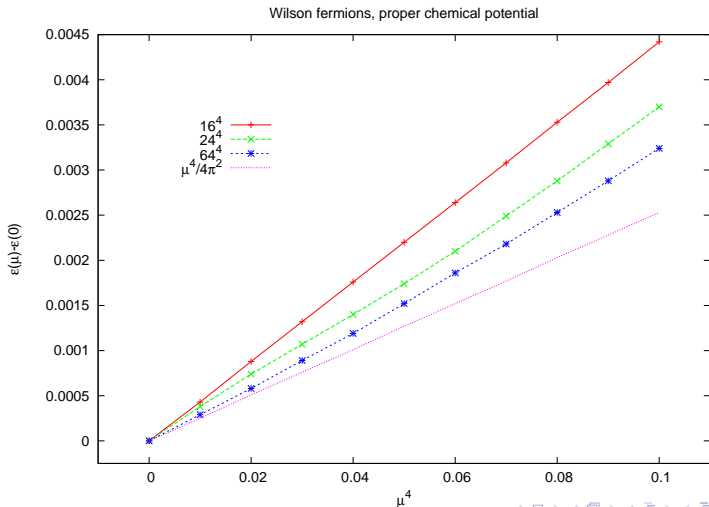
Dirac-Operator im Kontinuum

$$\tilde{D}^{cont}(\mu) = ip_\nu \gamma_\nu = ip_j \gamma_j + i(p_4 - i\mu) \gamma_4$$

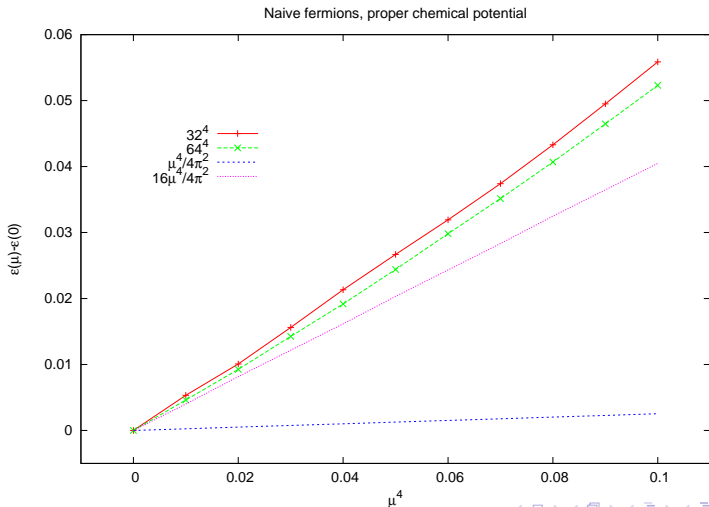
Dirac-Operator $\tilde{D}^W(\mu)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^W(\mu) &= i \sum_j \gamma_j \frac{\sin(p_j a)}{a} + i \gamma_4 \frac{\sin((p_4 - i\mu) a_t)}{a_t} + \\ &+ \mathbb{1} \sum_j \frac{1 - \cos(p_j a)}{a} + \mathbb{1} \frac{1 - \cos((p_4 - i\mu) a_t)}{a_t} \end{aligned}$$

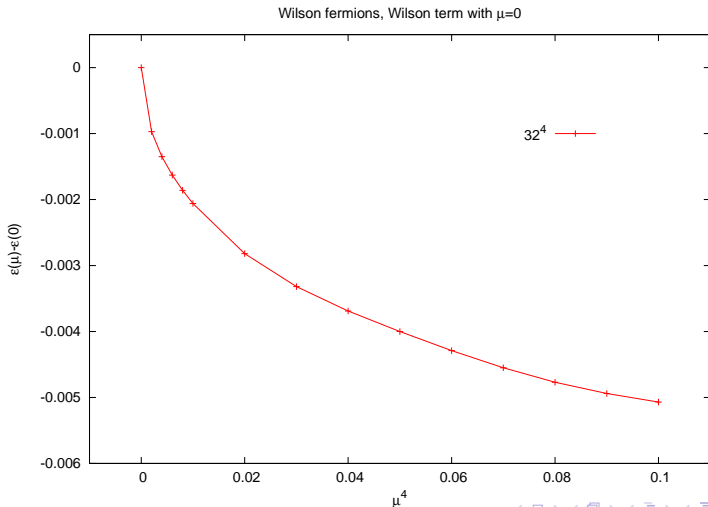
Wilson-Fermionen mit chemischen Potential als imaginäre Impulskomponente



Naive Fermionen mit chemischen Potential als imaginäre Impulskomponente



Wilson-Fermionen ohne chemisches Potential im Wilson-Term



Dirac-Operator

Dirac-Operator für das Kontinuum

$$D^{cont} = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \mu\gamma_4$$

Chirale Symmetrie ($m = 0$)

$$\gamma_5 : [D^{cont}, \gamma_5]_+ = 0$$

Wilson-Operator erfüllt chirale Symmetrie nicht.

Dirac-Operator

Dirac-Operator für das Kontinuum

$$D^{cont} = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \mu\gamma_4$$

Chirale Symmetrie ($m = 0$)

$$\gamma_5 : [D^{cont}, \gamma_5]_+ = 0$$

Wilson-Operator erfüllt chirale Symmetrie nicht.

Dirac-Operator

Dirac-Operator für das Kontinuum

$$D^{cont} = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \mu\gamma_4$$

Chirale Symmetrie ($m = 0$)

$$\gamma_5 : [D^{cont}, \gamma_5]_+ = 0$$

Wilson-Operator erfüllt chirale Symmetrie nicht.

Dirac-Operator

Dirac-Operator für das Kontinuum

$$D^{cont} = \gamma_\nu(\partial_\nu + iA_\nu) + \mu\gamma_4$$

Chirale Symmetrie ($m = 0$)

$$\gamma_5 : [D^{cont}, \gamma_5]_+ = 0$$

Wilson-Operator erfüllt chirale Symmetrie nicht.

Ginsparg-Wilson-Gleichung

Mildeste Art der Brechung der chiralen Symmetrie

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = a D\gamma_5 D$$

Overlap-Dirac-Operator

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{A}{\sqrt{\gamma_5 A \gamma_5 A}} \right], \quad A = \mathbb{1} - aD^W \\ &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \gamma_5 \text{sign}(H) \right], \quad H = \gamma_5 A \end{aligned}$$

Ginsparg-Wilson-Gleichung

Mildeste Art der Brechung der chiralen Symmetrie

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = a D\gamma_5 D$$

Overlap-Dirac-Operator

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{A}{\sqrt{\gamma_5 A \gamma_5 A}} \right], \quad A = \mathbb{1} - aD^W \\ &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \gamma_5 \text{sign}(H) \right], \quad H = \gamma_5 A \end{aligned}$$

Ginsparg-Wilson-Gleichung

Mildeste Art der Brechung der chiralen Symmetrie

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = a D\gamma_5 D$$

Overlap-Dirac-Operator

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{A}{\sqrt{\gamma_5 A \gamma_5 A}} \right], \quad A = \mathbb{1} - aD^W \\ &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \gamma_5 \text{sign}(H) \right], \quad H = \gamma_5 A \end{aligned}$$

Spektraltheorem

hermitische Matrizen

$$f(H) = \sum_i f(\lambda^{(i)}) e^{(i)} e^{(i)\dagger}$$

nicht-hermitische Matrizen

$$f(H) = \sum_i f(\lambda^{(i)}) r^{(i)} l^{(i)\dagger}$$

r ... rechts-Eigenvektor, l ... links-Eigenvektor

Spektraltheorem

hermitische Matrizen

$$f(H) = \sum_i f(\lambda^{(i)}) e^{(i)} e^{(i)\dagger}$$

nicht-hermitische Matrizen

$$f(H) = \sum_i f(\lambda^{(i)}) r^{(i)} l^{(i)\dagger}$$

r ... rechts-Eigenvektor, l ... links-Eigenvektor

Eigenwerte

Diagonalisierung:

- Fouriertransformation von H
- $\tilde{H} = \gamma_5 h_5 + \gamma_5 \gamma_\nu h_\nu$

Eigenwerte:

$$\lambda = \pm \sqrt{h_5^2 - h^2} = \pm s, \text{ zweifach entartet}$$

Eigenwerte

Diagonalisierung:

- Fouriertransformation von H
- $\tilde{H} = \gamma_5 h_5 + \gamma_5 \gamma_\nu h_\nu$

Eigenwerte:

$$\lambda = \pm \sqrt{h_5^2 - h^2} = \pm s, \text{ zweifach entartet}$$

Eigenwerte

Diagonalisierung:

- Fouriertransformation von H
- $\tilde{H} = \gamma_5 h_5 + \gamma_5 \gamma_\nu h_\nu$

Eigenwerte:

$$\lambda = \pm \sqrt{h_5^2 - h^2} = \pm s, \text{ zweifach entartet}$$

rechte & linke Eigenvektoren

rechtes Eigenwertproblem:

$$[\tilde{H} - \lambda^{(i)} \mathbf{1}] r^{(i)} = 0$$

linkes Eigenwertproblem:

$$l^{(i)} [\tilde{H} - \lambda^{(i)} \mathbf{1}] = 0$$

Orthonormalität:

$$l^{(i)} r^{(j)} = \delta_{ij}$$

rechte & linke Eigenvektoren

rechtes Eigenwertproblem:

$$[\tilde{H} - \lambda^{(i)} \mathbf{1}] r^{(i)} = 0$$

linkes Eigenwertproblem:

$$l^{(i)} [\tilde{H} - \lambda^{(i)} \mathbf{1}] = 0$$

Orthonormalität:

$$l^{(i)} r^{(j)} = \delta_{ij}$$

$sign(\tilde{H})$

Aus der Spektraldarstellung ergibt sich

$$sign(\tilde{H}) = \frac{sign(s)}{s} \tilde{H}$$

Dirac-Operator

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{sign(s)}{s} \gamma_5 \tilde{H} \right] \\ &= \mathbb{1} d_0 - \gamma_\nu d_\nu \end{aligned}$$

$sign(\tilde{H})$

Aus der Spektraldarstellung ergibt sich

$$sign(\tilde{H}) = \frac{sign(s)}{s} \tilde{H}$$

Dirac-Operator

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{sign(s)}{s} \gamma_5 \tilde{H} \right] \\ &= \mathbb{1} d_0 - \gamma_\nu d_\nu \end{aligned}$$

$sign(\tilde{H})$

Aus der Spektraldarstellung ergibt sich

$$sign(\tilde{H}) = \frac{sign(s)}{s} \tilde{H}$$

Dirac-Operator

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{1}{a} \left[\mathbb{1} - \frac{sign(s)}{s} \gamma_5 \tilde{H} \right] \\ &= \mathbb{1} d_0 - \gamma_\nu d_\nu \end{aligned}$$

Eigenwerte und Energiedichte

Eigenwerte

$$\lambda = d_0 \pm \sqrt{d^2}, \text{ zweifach entartet}$$

Energiedichte

$$\epsilon(\mu) = -\frac{1}{a^3 N^3 N_t} \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial a_t} \lambda_j \Big|_{a_t \mu = \text{const}}$$

Eigenwerte und Energiedichte

Eigenwerte

$$\lambda = d_0 \pm \sqrt{d^2}, \text{ zweifach entartet}$$

Energiedichte

$$\epsilon(\mu) = -\frac{1}{a^3 N^3 N_t} \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial a_t} \lambda_j \Big|_{a_t \mu = \text{const}}$$

Overlap-Fermionen

