

# Casimir Effekt

Verschiebung der Vakuumsenergie durch Randbedingungen

Christof Weber, Florian Wodlei

Institut für Theoretische Physik

Mai 2007

- 1 Grundlagen
  - Geschichte
  - Quantenfeldtheoretische Grundlagen
  - Einfaches Modell
  - Experimenteller Nachweis
  - Realistische Randbedingungen
- 2 Casimirenergie in Anwesenheit eines Wood Saxon Potentials
  - Quantenfeldtheoretische Grundlagen
  - Berechnung der Vakuumsenergie
  - Bestimmen der Eigenwerte der Operatoren
  - Eigenwerte führen zu Divergenzen
  - Regularisierung
  - Renormierung
  - Zusammenfassung

# Geschichte

## Was ist der Casimir-Effekt?

- Eine durch Vakuumfluktuationen bewirkte Kraft zwischen zwei Flächen

# Geschichte

## Was ist der Casimir-Effekt?

- Eine durch Vakuumfluktuationen bewirkte Kraft zwischen zwei Flächen
- 1948 wurde er von Hendrik Casimir vorhergesagt.

# Geschichte

## Was ist der Casimir-Effekt?

- Eine durch Vakuumfluktuationen bewirkte Kraft zwischen zwei Flächen
- 1948 wurde er von Hendrik Casimir vorhergesagt.
- Der experimentelle Nachweis gelang 1953 durch I.I. Abrikosova und B. V. Deriagin.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.
- Er fand heraus, dass die van-der-Waals-Kräfte das Kolloid nicht gut beschreiben.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.
- Er fand heraus, dass die van-der-Waals-Kräfte das Kolloid nicht gut beschreiben.
- Bald darauf bemerkte er, dass die Kraft zwischen zwei neutralen Molekülen nur mit Vakuumfluktuationen korrekt beschrieben wird.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.
- Er fand heraus, dass die van-der-Waals-Kräfte das Kolloid nicht gut beschreiben.
- Bald darauf bemerkte er, dass die Kraft zwischen zwei neutralen Molekülen nur mit Vakuumfluktuationen korrekt beschrieben wird.
- Er stellte sich nun die Frage, was passieren würde, wenn man statt der Moleküle zwei Spiegel im Vakuum aufstellt.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.
- Er fand heraus, dass die van-der-Waals-Kräfte das Kolloid nicht gut beschreiben.
- Bald darauf bemerkte er, dass die Kraft zwischen zwei neutralen Molekülen nur mit Vakuumfluktuationen korrekt beschrieben wird.
- Er stellte sich nun die Frage, was passieren würde, wenn man statt der Moleküle zwei Spiegel im Vakuum aufstellt.
- Diese Arbeit führte zur Vorhersage der anziehenden Kraft zwischen zwei reflektierenden Platten.

# Geschichte

- Casimir hat sich mit den Eigenschaften kolloidaler Lösungen beschäftigt, die über van-der-Waals-Kräfte bestimmt werden.
- Er fand heraus, dass die van-der-Waals-Kräfte das Kolloid nicht gut beschreiben.
- Bald darauf bemerkte er, dass die Kraft zwischen zwei neutralen Molekülen nur mit Vakuumfluktuationen korrekt beschrieben wird.
- Er stellte sich nun die Frage, was passieren würde, wenn man statt der Moleküle zwei Spiegel im Vakuum aufstellt.
- Diese Arbeit führte zur Vorhersage der anziehenden Kraft zwischen zwei reflektierenden Platten.
- Diese Kraft ist experimentell bestätigt worden.

# Zur Quantenfeldtheorie

- In der Quantenfeldtheorie ist die Nullpunktenergie der Felder im Allgemeinen unendlich.

# Zur Quantenfeldtheorie

- In der Quantenfeldtheorie ist die Nullpunktenergie der Felder im Allgemeinen unendlich.
- Um diese Unendlichkeit wieder wegzubekommen, führt man das Normalprodukt ein.

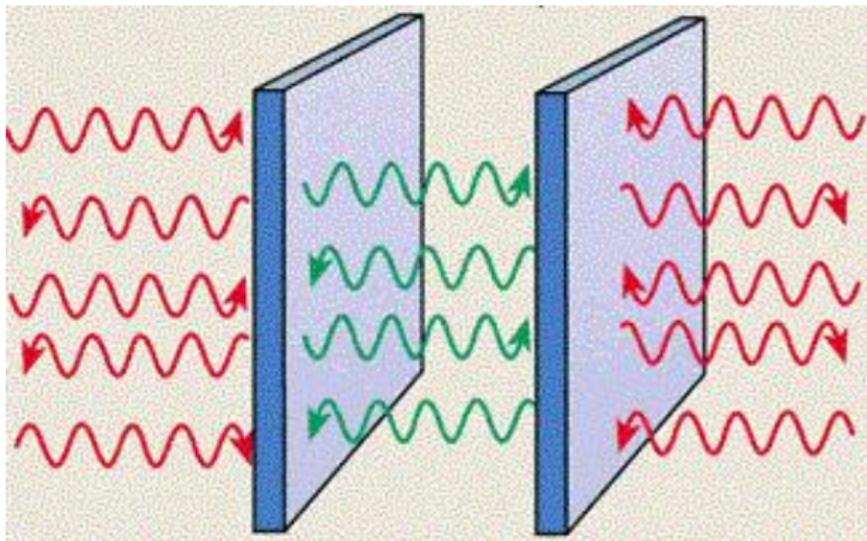
# Zur Quantenfeldtheorie

- In der Quantenfeldtheorie ist die Nullpunktsenergie der Felder im Allgemeinen unendlich.
- Um diese Unendlichkeit wieder wegzubekommen, führt man das Normalprodukt ein.
- Der Casimir-Effekt zeigt jedoch eindrucksvoll, dass diese Nullpunktsenergie **physikalische Relevanz** hat.

# Zur Quantenfeldtheorie

- In der Quantenfeldtheorie ist die Nullpunktenergie der Felder im Allgemeinen unendlich.
- Um diese Unendlichkeit wieder wegzubekommen, führt man das Normalprodukt ein.
- Der Casimir-Effekt zeigt jedoch eindrucksvoll, dass diese Nullpunktenergie **physikalische Relevanz** hat.
- Wir wollen dies anhand eines Beispiels demonstrieren.

# Parallele Platten



wobei sich die eine Platte bei  $z = 0$  und die andere bei  $z = a$  befindet.

# Skalares Feld

Für die gewählten Randbedingungen hat das skalare Feld die folgende Form

$$\varphi(z, t) = \sum_n \sqrt{\frac{c}{a\omega_n}} \left[ e^{\omega_n t} \sin(k_n z) a_n + e^{-\omega_n t} \sin(k_n z) a_n^\dagger \right]$$

wobei  $k_n = \frac{\pi n}{a}$  und  $\omega_n = c^2 k_n^2$

# Energie des Vakuumzustands

Wir interessieren uns für die Energie des Vakuumzustands

$$a_n |0\rangle = 0$$

D.h. die Energie schreibt sich dann als Erwartungswert des Vakuumzustands oder kurz Vakuumerwartungswert

$$E = \langle 0 | H | 0 \rangle$$

# Vakuumerwartungswert

$$E(0, a) = \int_0^a \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \sum_n^{\infty} \omega_n = \infty$$

Wir brauchen eine Art der Regularisierung!

$$\omega_n \rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-\delta \omega_n} \omega_n$$

⇒

$$E(0, a) = \int_0^a \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_n^{\infty} e^{-\delta \omega_n} \omega_n =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\hbar a}{2\pi c \delta} - \frac{\pi \hbar c}{24a} + \mathcal{O}(\delta^2) \right) = \underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\hbar a}{2\pi c \delta}}_{\infty} - \frac{\pi \hbar c}{24a}$$

# Regularisierte Energie und resultierende Kraft

$$E(0, a)^{reg} = -\frac{\pi \hbar c}{24a}$$

Die resultierende Kraft folgt demnach als

$$F(a) = -\frac{\partial}{\partial a} E(a)$$

Also

$$F(a) = -\frac{\partial}{\partial a} E(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}$$

D.h. die resultierende Kraft bewirkt eine Anziehung zwischen den Platten!

# Messung der Casimirkraft

Die Casimirkraft wurde erstmals 1953 von I.I. Abrikosova und B.V. Deriagin experimentell bestätigt.

Es folgten weitere Bestätigungen, darunter M. Sparnaay und aktueller Steve Lamoreaux (1997) und Umar Mohideen und Anushree Roy (1998).

Experimenteller Aufbau von Mohideen und Roy:

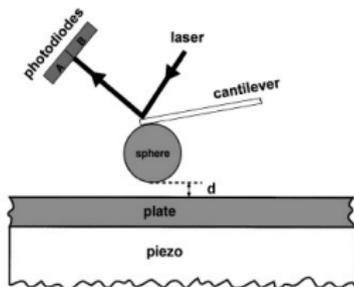


FIG. 1. Schematic diagram of the experimental setup. Application of voltage to the piezo results in the movement of the plate towards the sphere. The experiments were done at a pressure of 50 mTorr and at room temperature.

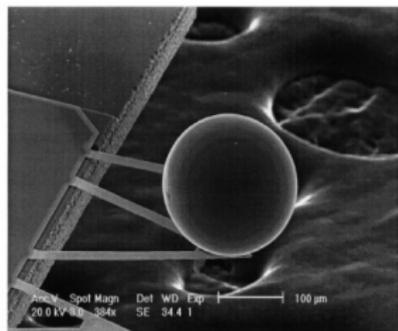
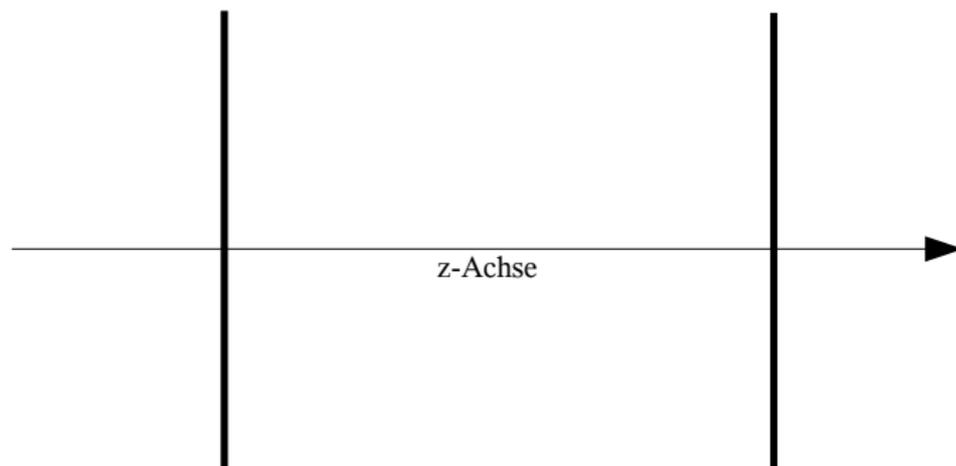


FIG. 2. Scanning electron microscope image of the metallized sphere mounted on a AFM cantilever.

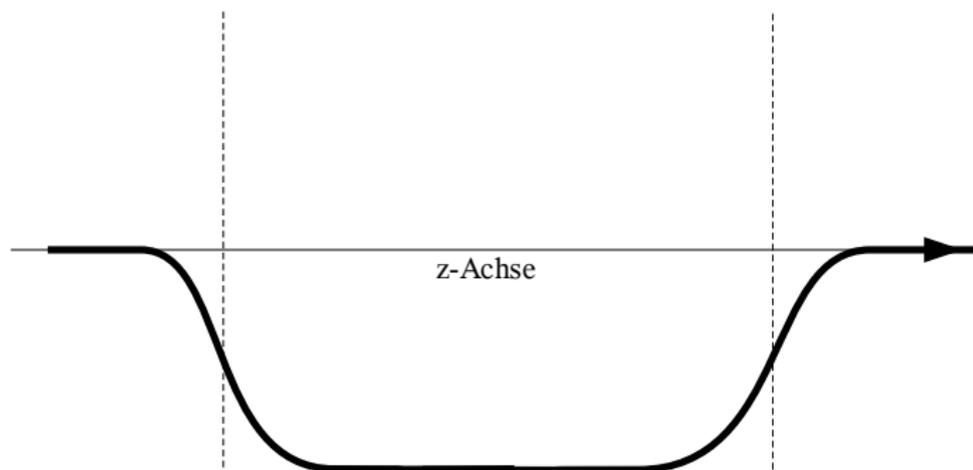
# unendliches Potentials

In Wirklichkeit verhalten sich die parallelen Platten für hohe Frequenzen nicht wie unendliches Potential sondern vielmehr wie ein endliches



# Wood Saxon Potential

Ein realistisches Potential ist das Wood Saxon Potential



# Casimirenergie

Wir wollen im folgenden die Casimirenergie bei Anwesenheit eines Wood Saxon Potentials berechnen.

# Casimirenergie

Wir wollen im folgenden die Casimirenergie bei Anwesenheit eines Wood Saxon Potentials berechnen.

## Definition

Die Casimirenergie ist die Energie bei Anwesenheit eines Potentials normiert auf die Energie ohne Potential

# Casimirenergie

Wir wollen im folgenden die Casimirenergie bei Anwesenheit eines Wood Saxon Potentials berechnen.

## Definition

Die Casimirenergie ist die Energie bei Anwesenheit eines Potentials normiert auf die Energie ohne Potential

Die Casimirenergie ist also eine Verschiebung der Nullpunktenergie durch die Anwesenheit eines Potentials

Skalares Feld  $\varphi$ 

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J} \varphi$$

Skalares Feld  $\varphi$ 

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J} \varphi$$

Wir wollen hier im euklidischen Formalismus arbeiten d.h.

$$\begin{aligned}(x_0, x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4 = ix_0) \\ (k_0, k_1, k_2, k_3) &\rightarrow (k_1, k_2, k_3, k_4 = -ik_0)\end{aligned}$$

Diese Transformation ist unter dem Namen **Wick-Rotation** bekannt.

# Erzeugendes Funktional

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J}\varphi - \Lambda_0)}$$

# Erzeugendes Funktional

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J}\varphi - \Lambda_0)}$$

Die für eine Quantenfeldtheorie wichtige Größe ist die **effektive Wirkung**

$$\Gamma[\varphi_c] = W[\mathcal{J}] - \langle \mathcal{J}\varphi_c \rangle$$

wobei  $W[\mathcal{J}] = -\ln Z[\mathcal{J}]$  und  $\varphi_c = \frac{\delta W[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}}$

Entwicklung der effektiven Wirkung in  $\varphi_c$ 

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left[ -V(\varphi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z[\varphi_c] + \dots \right]$$

Entwicklung der effektiven Wirkung in  $\varphi_c$ 

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left[ -V(\varphi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z[\varphi_c] + \dots \right]$$

Was uns interessiert ist das effektive  $V(\varphi_c)$ . Im besonderen für das Vakuum.

Entwicklung der effektiven Wirkung in  $\varphi_c$ 

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left[ -V(\varphi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z[\varphi_c] + \dots \right]$$

Was uns interessiert ist das effektive  $V(\varphi_c)$ . Im besonderen für das Vakuum.

Da wir an folgendem Vakuum Erwartungswert interessiert sind

$$\langle 0|H|0\rangle = V(\varphi_c^{vac})$$

Entwicklung der effektiven Wirkung in  $\varphi_c$ 

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x \left[ -V(\varphi_c) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z[\varphi_c] + \dots \right]$$

Was uns interessiert ist das effektive  $V(\varphi_c)$ . Im besonderen für das Vakuum.

Da wir an folgendem Vakuum Erwartungswert interessiert sind

$$\langle 0|H|0\rangle = V(\varphi_c^{vac})$$

Von oben folgt dann, wenn  $V(\varphi_c^{vac})$  raumzeitlich invariant ist

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} \Gamma[\varphi_c^{vac}]$$

# Vakuumerwartungswert

Für das Vakuum ist  $\mathcal{J} = 0$  und daher reduziert sich  $V(\varphi_c^{vac})$  zu

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} \Gamma[\varphi_c^{vac}] = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J}]$$

# Vakuumerwartungswert

Für das Vakuum ist  $\mathcal{J} = 0$  und daher reduziert sich  $V(\varphi_c^{vac})$  zu

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} \Gamma[\varphi_c^{vac}] = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J}]$$

D.h die Kenntnis von  $W[\mathcal{J}]$  ist ausreichend um die Vakuumsenergiedichte zu berechnen.

Berechnung von  $Z(\mathcal{J})$ 

Das erzeugende Funktional hatte die Struktur

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J}\varphi - \Lambda_0)}$$

Berechnung von  $Z(\mathcal{J})$ 

Das erzeugende Funktional hatte die Struktur

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J}\varphi - \Lambda_0)}$$

Nach partieller Integration folgt

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x [\frac{1}{2} \varphi (-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \varphi - \Lambda_0 - \mathcal{J}\varphi]}$$

Berechnung von  $Z(\mathcal{J})$ 

Das erzeugende Funktional hatte die Struktur

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \mathcal{J}\varphi - \Lambda_0)}$$

Nach partieller Integration folgt

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x [\frac{1}{2} \varphi (-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \varphi - \Lambda_0 - \mathcal{J}\varphi]}$$

D.h. das erzeugende Funktional hat folgende Struktur

$$Z[\mathcal{J}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} (\langle \varphi, A \varphi \rangle + \langle \mathcal{J}, \varphi \rangle - \int d^4x \Lambda_0)} = \dots = \frac{e^{\frac{1}{2} \langle \mathcal{J}, A^{-1} \mathcal{J} \rangle + \int d^4x \Lambda_0}}{\sqrt{\text{Det} A}}$$

Berechnung von  $W(\mathcal{J})$ 

Daraus folgt für  $W(\mathcal{J})$

$$W[\mathcal{J}] = -\ln Z[\mathcal{J}] = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{J}, A^{-1} \mathcal{J} \rangle - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Berechnung von  $W(\mathcal{J})$ 

Daraus folgt für  $W(\mathcal{J})$

$$W[\mathcal{J}] = -\ln Z[\mathcal{J}] = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{J}, A^{-1} \mathcal{J} \rangle - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Wir interessieren uns für den Fall  $\mathcal{J} = 0$

$$W[\mathcal{J} = 0] = - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Berechnung von  $W(\mathcal{J})$ 

Daraus folgt für  $W(\mathcal{J})$

$$W[\mathcal{J}] = -\ln Z[\mathcal{J}] = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{J}, A^{-1} \mathcal{J} \rangle - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Wir interessieren uns für den Fall  $\mathcal{J} = 0$

$$W[\mathcal{J} = 0] = - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Wobei sich der zweite Term mit folgender Identität  $\text{Det}D = e^{\text{Tr} \ln D}$  umschreiben lässt.

Berechnung von  $W(\mathcal{J})$ 

Daraus folgt für  $W(\mathcal{J})$

$$W[\mathcal{J}] = -\ln Z[\mathcal{J}] = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{J}, A^{-1} \mathcal{J} \rangle - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Wir interessieren uns für den Fall  $\mathcal{J} = 0$

$$W[\mathcal{J} = 0] = - \int d^4x \Lambda_o - \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det}A}} \right)$$

Wobei sich der zweite Term mit folgender Identität  $\text{Det}D = e^{\text{Tr} \ln D}$  umschreiben lässt.

$$W[\mathcal{J} = 0] = - \int d^4x \Lambda_o + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln A$$

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ D.h. für  $V(\varphi_c^{vac})$ 

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J} = 0] = \frac{1}{TV} \left( \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} Tr \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \right)$$

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ 

D.h. für  $V(\varphi_c^{vac})$

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J} = 0] = \frac{1}{TV} \left( \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \right)$$

Bisher war  $\Lambda_o$  noch frei. Wir wollen  $\Lambda_o$  derart wählen, dass  $V(\varphi_c^{vac})$  für den unbegrenzten Raum null ist.

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ 

D.h. für  $V(\varphi_c^{vac})$

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J} = 0] = \frac{1}{TV} \left( \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \right)$$

Bisher war  $\Lambda_o$  noch frei. Wir wollen  $\Lambda_o$  derart wählen, dass  $V(\varphi_c^{vac})$  für den unbegrenzten Raum null ist.

$$V(\varphi_c^{vac})|_{V=0} = \frac{1}{TV} \left[ \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ 

D.h. für  $V(\varphi_c^{vac})$

$$V(\varphi_c^{vac}) = -\frac{1}{TV} W[\mathcal{J} = 0] = \frac{1}{TV} \left( \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) \right)$$

Bisher war  $\Lambda_o$  noch frei. Wir wollen  $\Lambda_o$  derart wählen, dass  $V(\varphi_c^{vac})$  für den unbegrenzten Raum null ist.

$$V(\varphi_c^{vac})|_{V=0} = \frac{1}{TV} \left[ \int d^4x \Lambda_o - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\int d^4x \Lambda_o = \frac{1}{TV} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2)$$

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ 

D.h.  $V(\varphi_c^{vac})$  hat dann die Form

$$\begin{aligned}
 V(\varphi_c^{vac}) &= \frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2) - \frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) = \\
 &= -\frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln \left( \frac{-\partial_\mu^2 + m^2 + V}{-\partial_\mu^2 + m^2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2TV} \frac{T}{2\pi} \sum_\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ln \left( \frac{\omega^2 - \epsilon_\nu^2}{\omega^2 - (\epsilon_\nu^0)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Berechnung von  $V(\varphi_c^{vac})$ 

D.h.  $V(\varphi_c^{vac})$  hat dann die Form

$$\begin{aligned}
 V(\varphi_c^{vac}) &= \frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2) - \frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln(-\partial_\mu^2 + m^2 + V) = \\
 &= -\frac{1}{2TV} \text{Tr} \ln \left( \frac{-\partial_\mu^2 + m^2 + V}{-\partial_\mu^2 + m^2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2TV} \frac{T}{2\pi} \sum_\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ln \left( \frac{\omega^2 - \epsilon_\nu^2}{\omega^2 - (\epsilon_\nu^o)^2} \right)
 \end{aligned}$$

wobei  $\epsilon_\nu^2$  und  $(\epsilon_\nu^o)^2$  die Lösungen der folgenden Gleichungen sind

$$\begin{aligned}
 (-\partial_\nu^2 + m^2 + V)\psi_\nu &= \epsilon_\nu^2 \psi_\nu \\
 (-\partial_\nu^2 + m^2)\psi_\nu &= (\epsilon_\nu^o)^2 \psi_\nu
 \end{aligned}$$

# Lösungen der Differentialgleichungen in $\psi_\nu$

Die  $\psi_\nu$  haben folgende Struktur

$$\psi_\nu = Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \mathcal{J}_l(r)$$

Lösungen der Differentialgleichungen in  $\psi_\nu$ 

Die  $\psi_\nu$  haben folgende Struktur

$$\psi_\nu = Y_{lm}(\theta, \varphi) \cdot \mathcal{J}_l(r)$$

und die  $\epsilon_\nu^2$  und  $(\epsilon_\nu^o)^2$  sind dann die entsprechenden Energieeigenwerte des Systems

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu^2 &= E_{l,nl}^2 \\ (\epsilon_\nu^o)^2 &= (E_{l,nl}^o)^2\end{aligned}$$

# Vakuumerwartungswert

Daraus folgt

$$V(\varphi_c^{\text{vac}}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi V} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ln \left( \frac{\omega^2 - E_{l,nl}^2}{\omega^2 - (E_{l,nl}^o)^2} \right)$$

# Proper Time Regularisierung

Wir müssen auch hier regularisieren

$$\ln p = - \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-sp}$$

# Proper Time Regularisierung

Wir müssen auch hier regularisieren

$$\ln p = - \int_{\frac{1}{\Lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-sp}$$

$$V(\varphi_c^{\text{vac}}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi V} \sum_{l,nl} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{\Lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - E_{l,nl}^2)} - \int_{\frac{1}{\Lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - (E_{l,nl}^{\circ})^2)} \right\}$$

## Proper Time Regularisierung

⇒

$$\begin{aligned}
 V(\varphi_c^{\text{vac}}) = & -\frac{1}{4\sqrt{\pi}V} \sum_{l,nl} \sqrt{E_{l,nl}^2} \left[ e^{\frac{-E_{l,nl}^2}{\Lambda_o^2}} + \text{erfc} \left( \frac{\sqrt{E_{l,nl}^2}}{\Lambda_o} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{4\sqrt{\pi}V} \sum_{l,nl} \sqrt{(E_{l,nl}^o)^2} \left[ e^{\frac{-(E_{l,nl}^o)^2}{\Lambda_o^2}} + \text{erfc} \left( \frac{\sqrt{(E_{l,nl}^o)^2}}{\Lambda_o} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist die regularisierte effektive Vakuumsdichte

# Renormierung durch Entwicklung nach $V$

Wir beginnen mit

$$V(\varphi_c^{vac}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi V} \sum_{l,nl} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - E_{l,nl}^2)} - \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - (E_{l,nl}^o)^2)} \right\}$$

und ersetzen die Eigenwerte wieder durch die Operatoren

# Renormierung durch Entwicklung nach $V$

Wir beginnen mit

$$V(\varphi_c^{\text{vac}}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi V} \sum_{l,nl} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - E_{l,nl}^2)} - \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(\omega^2 - (E_{l,nl}^0)^2)} \right\}$$

und ersetzen die Eigenwerte wieder durch die Operatoren

$$V(\varphi_c^{\text{vac}}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi V} \sum_{l,nl} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2 + V)} - \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} ds s^{-1} e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2)} \right\}$$

Renormierung durch Entwicklung nach  $V$ 

und entwickeln die Exponentialfunktion in  $V$

$$\begin{aligned}
 e^{-sA} &= e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2 + V)} = e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2)} e^{-sV} \approx \\
 &e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2)} \left( 1 - s \underbrace{\int_0^1 d\alpha V e^{-s(1-\alpha)(-\partial_\mu^2 + m^2)}}_M + \right. \\
 &\left. + s^2 \underbrace{\int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta V e^{-s(1-\alpha-\beta)(-\partial_\mu^2 + m^2)} V e^{-s(\beta)(-\partial_\mu^2 + m^2)}}_W + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Renormierung durch Entwicklung nach  $V$ 

und entwickeln die Exponentialfunktion in  $V$

$$\begin{aligned}
 e^{-sA} &= e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2 + V)} = e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2)} e^{-sV} \approx \\
 &e^{-s(-\partial_\mu^2 + m^2)} \left( 1 - s \underbrace{\int_0^1 d\alpha V e^{-s(1-\alpha)(-\partial_\mu^2 + m^2)}}_M + \right. \\
 &\left. + s^2 \underbrace{\int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta V e^{-s(1-\alpha-\beta)(-\partial_\mu^2 + m^2)} V e^{-s(\beta)(-\partial_\mu^2 + m^2)}}_W + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Der zweite und dritte Term sind divergent und entsprechen der unrenormierten Masse und der unrenormierten Wellenfunktion

# Renormierter Vakuum Erwartungswert

Der renormierte Vakuum Erwartungswert hat dann die folgende Form

$$V(\varphi_c^{\text{vac}})^{\text{ren}} = V(\varphi_c^{\text{vac}}) - \left\{ \frac{1}{4\pi V} \text{Tr} \int_{\frac{1}{\Lambda}}^{\infty} ds s^{-1} (s\tilde{M} + s^2\tilde{W}) \right\}$$

- Nullpunktsenergie ist i.A. unendlich. Casimir Effekt zeigt das sie physikalische Relevanz hat

- Nullpunktsenergie ist i.A. unendlich. Casimir Effekt zeigt das sie physikalische Relevanz hat
- Die Vakuumsenergieverschiebung bewirkt eine attraktive Kraft

- Nullpunktsenergie ist i.A. unendlich. Casimir Effekt zeigt das sie physikalische Relevanz hat
- Die Vakuumsenergieverschiebung bewirkt eine attraktive Kraft
- Realistische Randbedingung durch Wood Saxon Potential eingebaut

- Nullpunktsenergie ist i.A. unendlich. Casimir Effekt zeigt das sie physikalische Relevanz hat
- Die Vakuumsenergieverschiebung bewirkt eine attraktive Kraft
- Realistische Randbedingung durch Wood Saxon Potential eingebaut
- Eine analytische Berechnung der Casimirenergie für das Wood Saxon Potential ist nicht möglich

- Nullpunktsenergie ist i.A. unendlich. Casimir Effekt zeigt das sie physikalische Relevanz hat
- Die Vakuumsenergieverschiebung bewirkt eine attraktive Kraft
- Realistische Randbedingung durch Wood Saxon Potential eingebaut
- Eine analytische Berechnung der Casimirenergie für das Wood Saxon Potential ist nicht möglich
- Lässt sich numerisch lösen

# Literatur



M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko *New Developments in the Casimir Effect*.

<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0106045v1>, 8 Jun 2001



K.A. Milton *The Casimir Effect*. World Scientific; 2003



C. Mann, Daniel Weiskopf *Casimirenergie bei Anwesenheit eines Wood-Saxon-Potentials*. Projektseminar im SS1995